

# DE LA THÉORIE DE MESURE À LA PROBABILITÉ

DUKUZE FAZILI André\*, SAFARI NTAKAMARO Marc\*\*, DUSENGIMANA  
BIVUZEMENSHI Prosper\*\*\* et MUGIRANEZA NTAHORUBURIYE Bienfait\*\*\*\*

## Résumé

En observant la définition de la théorie de mesure, on se rend compte que le fonctionnement axiomatique de la théorie des probabilités en dépend. Notamment, dans la suite on dira que l'espace probabilisé est un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  où la mesure  $\mathcal{P}$  est telle que  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ ; on dit alors que  $\mathcal{P}$  est une mesure de probabilité (c'est pour cela qu'on la note  $\mathcal{P}$ ) ; les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés « événements ». Dans le même angle d'idée, on a dit que la variable aléatoire est toute application mesurable  $X$  d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  dans un espace mesurable  $(E, \varepsilon)$ . Dans cet article, nous avons bien souligné que lorsque de plus l'ensemble des  $k$  possibles ou des éventualités est fini, le calcul de probabilité se ramène à des problèmes de dénombrement. Lorsque l'ensemble des éventualités est de nature infinie non dénombrable, on aura besoin, pour définir une probabilité, de la théorie de mesure.

Les liens qui existent entre la théorie de probabilité, de la théorie de mesure sont nombreux, cependant le vocabulaire est souvent différent. Dans le développement de notre article, nous avons montré clairement le lien entre les deux théories et avons donné systématiquement le terme probabiliste et analyste employés pour les mêmes notions, ce qui nous a permis de dire que la notion d'espace mesurable correspond à celle d'espace probabilisable en calcul de probabilité. Nous avons dit que,  $E$  étant un ensemble quelconque et  $T$  une tribu en langage probabiliste,  $E$  est appelé l'univers des possibles, les éléments de  $E$  sont des éventualités, et ceux de  $T$  sont des événements. Ainsi, on en déduit que, une probabilité est un cas particulier d'une mesure et que la notion d'espace mesurable correspond bien à la notion d'espace probabilisé.

**Mots clés :** *Théorie, Mesure et Probabilité.*

## FROM MEASUREMENT THEORY TO PROBABILITY

### Abstract

By observing the definition of measurement theory, one realizes that the axiomatic functioning of probability theory depends on it. In particular, in the following we will say that the probabilized space is a measured space  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  where the measure

---

\* Chef de Travaux à l'Institut Supérieur Pédagogique de MATANDA (ISP/MATANDA), Département de Mathématique-Physique, Tel : +243995497777 ; E-mail : [fazilidukuze@gmail.com](mailto:fazilidukuze@gmail.com)

\*\* Assistant à l'Université de Goma (UNIGOM) ; faculté de Sciences agronomiques ; Tel : +243977507027 ; E-mail : [marcsafri@gmail.com](mailto:marcsafri@gmail.com)

\*\*\* Assistant à l'Institut Supérieur Pédagogique de Goma (ISP/GOMA), Département de Mathématique-Physique, Tel : +243898028433 ; E-mail : [prosperbayizere@gmail.com](mailto:prosperbayizere@gmail.com)

\*\*\*\* Assistant à l'Institut Supérieur Pédagogique de Goma (ISP/GOMA), Département de Mathématique-Physique, Tel : +243977825897 ; E-mail : [mugiranezabienfaitboom@gmail.com](mailto:mugiranezabienfaitboom@gmail.com)

$P$  is such that  $P(\Omega)=1$ ; we then say that  $P$  is a measure of probability (that's why we note it  $P$ ); the elements of  $A$  are called "events". In the same vein, it has been said that the random variable is any measurable map  $X$  of a probabilized space  $(\Omega, A, P)$  into a measurable space  $(E, \varepsilon)$ . In this article, we have pointed out that when in addition the set of possible ks or contingencies is finite, the probability calculation boils down to enumeration problems. When the set of contingencies is of an infinite nature that cannot be counted, measurement theory will be needed to define a probability. The links between probability theory and measurement theory are numerous, but unfortunately the vocabulary is often different. In the development of our article, we tried to clearly show the link between the two theories and to systematically give the term probabilistic and analyst used for the same notions, which allowed us to say that the notion of measurable space corresponds to that of probability space in probability calculation. We have said that, since  $E$  is any set and  $T$  a tribe in probabilistic language,  $E$  is called the universe of possibilities, the elements of  $E$  are contingencies, and those of  $T$  are events.

Thus, it is deduced that a probability is a special case of a measure. Indeed, the pair  $(E, T)$  being a measurable space,  $p$  being a measure on  $T$ ,  $p$  is a probability if and only if  $p(E)=1$ . It follows from this that the notion of measurable space corresponds well to the notion of probabilized space.

**Keywords:** *Theory, Measurement and Probability.*

## I. INTRODUCTION

Les sciences empiriques procèdent de préférence par induction. Mais cette démarche exige une notion de « vraisemblance », de « probabilité » dans un sens large, capable d'étayer la théorie qui en résulte, à défaut de la justifier. La relation « l'événement  $A$  n'est pas plus probable que l'événement  $B$  » définit une relation d'ordre faible sur les événements que nous observons. Si nous arrivons à définir une notion de *mesure* de cette probabilité, nous aurons à disposition une théorie capable d'organiser et de structurer efficacement notre savoir. Les difficultés pour y arriver sont d'ordre formel et épistémologique. Commençons par le problème formel celui de Comment mesurer un objet mathématique.

Mathématiquement, il y a deux façons de mesurer un ensemble, l'objet de base le plus répandu des mathématiques. Si cet ensemble est constitué d'éléments individuels, séparés, *discrets*, on peut mesurer sa *taille* en « comptant » les éléments. Nous avons pour cela à disposition la théorie des nombres cardinaux, qui constitue une modélisation de la notion de dénombrement et qui la généralise dans le cas infini. Mais les objets géométriques, les objets *continus*, ont largement échappé à cette approche. Comment mesurer une surface, un volume par exemple ? Une théorie mathématique différente s'est développée dès le XIX<sup>e</sup> siècle, dont l'objectif est non pas de mesurer la taille, mais le *contenu* d'un ensemble. Elle tente d'établir une mesure numérique pour le plus grand nombre possibles de sous-ensembles d'un ensemble. Si l'on exige que cette mesure soit additive et invariante par rapport à une isométrie, c'est-à-dire une transformation qui

laisse invariantes les distances, on peut montrer qu'une telle mesure n'existe que sous certaines conditions. En particulier elle n'existe pas pour l'ensemble de tous les sous-ensembles. Il faut par conséquent se limiter à des classes restreintes de sous-ensembles. C'est à E. Borel que l'on doit d'avoir introduit la notion de tribu, qui permet de définir une telle mesure. Voici quelques définitions qui illustrent le cadre formel dans lequel une mesure peut exister.

Un ensemble de sous-ensembles de E est une *tribu*, si les conditions suivantes sont remplies :

- l'ensemble vide, en fait partie ;
- avec chaque sous-ensemble, son complément en fait aussi partie ;
- si une famille dénombrable de sous-ensembles en fait partie, alors la réunion en fait partie aussi ;

Sur une tribu, définie sur un ensemble, il existe une mesure  $\mu$  si les conditions suivantes sont remplies :

- l'ensemble vide est de mesure 0
- la mesure d'une réunion dénombrable d'ensembles est la somme des mesures individuelles

Des résultats de Lebesgue établissent des théorèmes d'existence de mesures sur une tribu, rendant possible diverses théories mathématiques centrées sur un processus de mesure, dont la théorie des probabilités est l'un des exemples importants.

Le concept de mesure de probabilité est lui-même objet de débat depuis plus d'un siècle. Faut-il considérer la probabilité d'un événement comme un indice représentant notre croyance subjective, comme le soutient l'approche subjective, bayésienne, ou, et c'est le point de vue fréquentiste, comme un nombre idéal vers lequel tendrait la fréquence de l'occurrence de cet événement. Le problème n'a pas été résolu, mais la discussion autour de cette question s'est faite plus discrète. Peut-être parce que la théorie mathématique sous-jacente à ces deux écoles est la même. Il s'agit essentiellement de la théorie que nous venons d'évoquer, avec la particularité que dans le cas de la théorie de la probabilité la mesure est normée, c'est-à-dire que la mesure de l'ensemble E est fixée à 1. L'ensemble E, l'*ensemble fondamental*, regroupe tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire, et les événements forment une tribu sur E. Cette tribu est choisie en fonction de critères pragmatiques, parmi lesquels figurent les suivantes : quelle est la précision du langage que nous voulons adopter ? Autrement dit, avec quel degré de détails voulons nous parler des résultats de l'expérience ? Quelle est l'utilisation que nous voulons faire de la notion de probabilité ?

Un exemple permet d'illustrer ce point. Le dé à jouer produit une expérience aléatoire particulièrement simple et courante. Les résultats peuvent être représentés par l'ensemble  $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ . Si nous ne sommes intéressés que par la parité du résultat, nous pouvons choisir la tribu constituée par l'ensemble vide et les sous-ensembles  $\{1,3,5\}$ ,  $\{2,4,6\}$  et  $\{1,2,3,4,5,6\}$ , c'est-à-dire que nous distinguons les événements : impossible, impair, pair et certain. Mais si nous voulons distinguer tous les résultats, nous choisirons la tribu qui contient tous les 64 sous-ensembles de E. Par

exemple  $\{1,5,6\}$  représentera l'événement « le résultat est plus petit que 2 ou plus grand que 4 ». Dans les deux cas, nous pouvons choisir comme mesure d'un événement simplement son cardinal – c'est-à-dire le nombre de résultats qu'il contient – divisé par le cardinal de  $E$ . C'est le modèle équiprobable habituel.

La théorie mathématique des probabilités, basée sur l'axiomatisation de Kolmogorov, offre un cadre formel dans lequel les calculs se font essentiellement de la même manière, que l'on se fonde sur l'approche subjectiviste ou fréquentiste. Mais la méthodologie se différencie fortement selon les présupposés conceptuels concernant la notion de la mesure de la probabilité.

La théorie de la mesure est la branche des mathématiques qui traite des espaces mesurés et est le fondement axiomatique de la théorie des probabilités. Compte tenu de ce qui précède, nous nous sommes posé les questions suivantes :

- Quels sont les éléments de correspondances que l'on peut retrouver dans la théorie de mesure et celle de la probabilité ?
- La notion de probabilité est-elle déduite de celle de la mesure ?

L'objectif de notre recherche est donc de présenter une théorie qui lie la théorie de mesure à la théorie de probabilité.

L'intérêt de cette recherche est notamment scientifique, car elle nous permettra dans la suite d'envisager la compatibilité quelque part de ces deux théories et de savoir si l'une peut compléter l'autre dans leurs applications.

## II. MÉTHODE ET MATÉRIELS

Pour mener à bon escient la présente étude et atteindre nos objectifs fixés, nous avons adopté la méthode déductive associée à la documentation par laquelle nous avons essayé de rassembler les éléments relatifs à notre sujet de recherche. Des éléments de définitions élémentaires nous ont permis de bien appréhender cette recherche qui vise à comprendre les liens entre une mesure et une probabilité.

### II.1. THÉORIE DE LA MESURE ET DE PROBABILITÉ [J. Genet, p.45]

#### II. 1.1. Théorie de la mesure

##### 1. Généralités

Pour construire la notion de mesure  $\mu$  sur un ensemble  $E$ , il faut d'abord définir au sein de l'ensemble des parties de  $E$  ce que l'on appelle une *tribu*, ou une  $\sigma$ -*algèbre*. Il s'agit d'un ensemble  $T$  de parties de  $E$  possédant les trois propriétés suivantes : l'ensemble vide appartient à  $T$  ; le complémentaire d'un élément de  $T$  est élément de  $T$  ; toute réunion dénombrable d'éléments de  $T$  est un élément de  $T$ .

Une fois définie une tribu, une mesure est une application  $\mu$  de  $T$  dans l'ensemble des réels positifs ou nuls telle que la somme des mesures d'une suite  $(A_n)$  d'éléments de  $T$  deux à deux disjoints (somme des termes d'une série convergente, soit la mesure de leur réunion).

Dans certains cas, on permet à une mesure de prendre des valeurs infinies. À l'inverse, les *mesures de probabilités* (abrégées en probabilités) sont les mesures qui vérifient l'égalité  $\mu(E) = 1$ .

Une théorie de mesure est un procédé qui associe à tout ensemble  $A$  (dans une certaine classe) un nombre positif  $\mu(A)$ , appelé mesure de  $A$ , et qui vérifie certaines propriétés (monotonie, additivité, ...).

En dimension 1, la mesure correspond à la longueur, à l'aire en dimension 2 et au volume en dimension 3, d'où la généralisation.

Une théorie d'intégration est un procédé qui associe à toute fonction  $f$  (dans une certaine classe) un nombre  $I(f)$  appelé intégrale de  $f$  et qui vérifie certaines propriétés (linéarité, positivité, ...).

Intégration et mesure sont étroitement liées si  $A \subset \mathbb{R}^d$ , on définit la fonction indicatrice de  $A$  par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si non} \end{cases}, 1_A \rightarrow \mathbb{R}$$

Si  $1_A$  est intégrable (pour un certain procédé d'intégration).

On peut définir la mesure de  $A$ ,  $\mu(A) = \int 1_A(x) dx$ .

On obtient ainsi une application  $\mu$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- Monotonie : si  $A \subset B$  alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$  car  $1_A \leq 1_B$
- Additivité : si  $A \cap B = \emptyset$  alors  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Car  $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B$

**Remarque**

On dit que  $A \subset \mathbb{R}^d$  est quarrable si  $1_A$  est intégrable au sens de Riemann. Aussi  $A \subset \mathbb{R}^d$  est quarrable si  $A$  est bornée et si  $A$  est négligeable. [Thierry Gallay, 2019, P9]

**2. Tribus et Mesure [J. Roger, 1980, p.66]**

**A. Tribus ou  $\sigma$ - algèbre**

**Définition 1:**

Soit  $E$  un ensemble,  $T$  une famille des parties de  $E$ , c'est-à-dire  $T \subset \mathcal{P}(E)$ .

La famille  $T$  est une tribu (on dit aussi une  $\sigma$ - algèbre) sur  $E$  si  $T$  vérifie :

1.  $\emptyset \in T, E \in T,$
2.  $T$  est stable par la réunion dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $T$  on a :  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$
3.  $T$  est stable par intersection dénombrable.
4.  $T$  est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que  $\forall A \in T,$  on a :  $A^c \in T$  ( $A^c = E - A$ )

**Remarque**

Il est clair que pour montrer qu'une partie de  $E$  est une tribu, il est inutile de vérifier les propriétés 1 et 4 de la définition précédente. Il suffit de vérifier par exemple  $\emptyset \in T$  (ou  $E \in T$ ), 2 (ou 3) et 4.

**Exemple**

$\{\emptyset, E\}$  et  $\mathcal{P}(E)$  sont des tribus sur  $E$  appelé respectivement tribu grossière et tribu discrète ; en effet ces parties vérifient trivialement les propriétés précédentes d'une tribu.

**Proposition 1**

Soient  $E$  et  $I$  deux ensembles pour  $\forall i \in I$ , on se donne une tribu  $T_i$  sur  $E$  alors la famille (des parties de  $E$ )

$\bigcap_{i \in I} T_i = \{A \subset E, A \subset T_i, \forall i \in I\}$  est une tribu sur  $E$ .

En effet, on a :  $\emptyset \in T$  car  $\emptyset \in T_i, \forall i \in I$ . On remarque que  $T$  est stable par passage au complémentaire car ; si  $A \subset T$  on a :  $A \in T_i, \forall i \in I$ ; et donc  $A^c \in T_i \forall i \in I$  (car  $T_i$  est stable par passage au complémentaire) donc  $A^c \in T$ .

On remarque en fin que  $T$  est stable par union dénombrable, car si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T$ , on a :  $A_n \in T_i, \forall i \in I, \forall n \in \mathbb{N}$

Donc  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T_i, \forall i \in I$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$  (car  $T_i$  est stable par union dénombrable, donc  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$

On n'en déduit que  $T$  est une tribu.

**B. Mesures (AMAURY LAMBERT, 2010-2011 Page 80)****Définition 2**

Soit le couple  $(E, T)$  un espace mesurable.

On appelle mesure, une application  $m: T \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  (avec  $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ) vérifiant :

1.  $m(\emptyset) = 0$
2.  $m$  est  $\sigma$ -additive, c'est-à-dire pour toute famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de l'élément de  $T$  disjoints deux à deux tel que  $A_n \cap A_m = \emptyset$  si  $n \neq m$  on a :

$$m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n).$$

**Remarque :**

- Dans cette définition, on étend à  $\overline{\mathbb{R}^+}$  l'addition dans  $\mathbb{R}^+$ . On a simplement posé  $x + (+\infty) = +\infty, \forall x \in \overline{\mathbb{R}^+}$ .
- Soit  $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}^+}$ , remarquons que  $x + y = x + z \Rightarrow y = z$  si  $x$  est différent de  $+\infty$  i.e  $x < +\infty$
- Dans le cas  $E = \mathbb{R}$  et  $T = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , il est facile de construire les mesures sur  $T$ , mais il n'existe pas des mesures sur  $T$  notée  $m$ , tel que  $m([a, b]) = b - a; \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Une telle mesure existe si on prend la tribu borélienne sur  $\mathbb{R}$ .

### 3. Fonctions Mesurables et Intégrales

#### ➤ Intégrales des fonctions mesurables positives

**Définition 3:** (application mesurable)

Soient  $(\Omega, \mathcal{A})$  et  $(\Omega', \mathcal{A}')$  deux espaces mesurables. On dit qu'une application  $f: \Omega \rightarrow \Omega'$  est mesurable (par rapport aux tribus  $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ ) si  $\forall B \in \mathcal{A}', f^{-1}(B) = \{x \in \Omega; f(x) \in B\}$

**Définition 4 :** (mesure image)

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $(\Omega', \beta)$  un espace mesurable. Soit  $f: \Omega \rightarrow \Omega'$  mesurable. L'application  $V: \beta \rightarrow [0, +\infty[$  définie par  $V(B) = \mu(f^{-1}(B))$  est une mesure appelée mesure image de  $\mu$  par  $f$ .

**Définition 5**

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré.

Si  $f: \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  est mesurable (par rapport aux tribus  $\mathcal{A}$  et  $\beta(\mathbb{R})$ ) positive, l'intégrale de  $f$  sur  $\Omega$  par rapport à la mesure  $\mu$  est définie par :

$$\int_{\Omega} f(x)\mu(dx) = \sup_{\phi \in \varepsilon(f)} \int_{\Omega} \phi(x)\mu(dx)$$

Où  $\varepsilon(f) = \{\phi \text{ étagée positive} : \phi(x) \leq f(x), \forall x \in \Omega\}$ . cette intégrale peut prendre sa valeur dans  $[0, +\infty]$ . Pour  $\beta \in \mathcal{A}$ , on note  $\int_{\beta} f(x)\mu(dx) = \int_{\Omega} f(x)1_{\beta}\mu(dx)$

**Définition 6**

Soit  $\mu$  mesure sur  $(\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}))$ . La mesure  $\mu$  est dite avoir pour densité la fonction  $f \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  (par rapport à  $\lambda$ ) si  $\forall \phi$  mesure positive de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)f(x)\mu(dx)$

Ceci implique en particulier que  $\forall \beta \in \beta(\mathbb{R}), \mu(\beta) = \int_{\beta} f(x)\mu(dx)$

#### ➤ Lien entre intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann.

Quand  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \beta(\mathbb{R}), \lambda)$ , l'intégrale  $\int_{\Omega} f(x)\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx)$  que nous venons définir s'appelle **intégrale de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$** . par définition l'intégrale de Lebesgue sur un intervalle  $[a, b]$  est donnée par :

$$\int_{[a,b]} f(x)\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)1_{[a,b]}\lambda(dx)$$

L'intégrale de Riemann est celle qui se calcule avec la primitive. Si  $f$  admet une primitive  $F$  alors son intégrale de Riemann est

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Avec la convention que si  $F$  n'est pas définie en  $a$  (et pareil  $b$ ), par exemple par ce que  $a = +\infty$ , alors  $F(a) = \lim_{x \rightarrow a, x \in [a,b]} F(x)$ . on parle alors d'intégrale généralisée (ou d'intégrale de Riemann généralisée). L'intégrale de Riemann n'est définie que si  $F(a)$  et  $F(b)$  sont finis.

On a les règles de signe suivantes :

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

$$\int_{[a,b]} f(x)\lambda(dx) = \int_{[b,a]} f(x)\lambda(dx)$$

Dans le cas où  $f$  est une intégrale de Riemann, nous avons l'égalité suivante entre les deux types d'intégrale si  $a \leq b$

$$\int_{[a,b]} f(x)\lambda(dx) = \int_a^b f(x)dx$$

C'est en général, avec cette formule, que l'on calculera les intégrales. On écrira parfois :

$$\int_{[a,b]} f(x)\lambda(dx) = \int_{[a,b]} f(x)dx.$$

## I.2. FONDEMENT DE LA THÉORIE DE PROBABILITÉ

[Pierre DL MORAL, BRUNO REMYIARD, AND, Silvain RIBENTHALER, Ellipse, Paris, 2006]

### 1. ENSEMBLES DENOMBRABLES ([https:// halarchives-ouvertes.fr/hal.](https://halarchives-ouvertes.fr/hal.))

#### Définition 7:

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f: E \rightarrow F$  une application.

- $f$  est une injection si  $\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- $f$  est une surjection si  $\forall z \in F, \exists x \in E, f(x) = z$
- $f$  est une bijection si  $f$  est une injection et surjection.

#### Proposition 2

Soient  $E, F, G$  des ensembles. Soient  $f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$ . alors  $f$  et  $g$  injectives  $\Rightarrow (g \circ f)$  injective).

#### Preuve

Soient  $x$  et  $y$  tel que  $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ :

On a:  $g[f(x)] = g[f(y)]$ . Comme  $g$  est injective donc  $f(x) = f(y)$  et comme aussi  $f$  est injective, on a donc en fin  $x = y$ ; Donc  $g \circ f$  est bien une injection

#### Définition 8

On dit qu'un ensemble  $E$  est dénombrable s'il existe une injection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ . Dans le cas où  $E$  est infini, on démontre qu'il existe alors une bijection de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ . (Cela revient à dire que l'on peut compter un à un les éléments de  $E$ ).



## 2. DÉFINITIONS GÉNÉRALES

### Définition 9

On appelle espace probabilisé, un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  où la mesure  $\mathcal{P}$  est telle que  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ . on dit alors que  $\mathcal{P}$  est une mesure de probabilité (c'est pour cela qu'on la note  $\mathcal{P}$ ). Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont appelés « événements ».

### Définition 10

On appelle variable aléatoire, toute application mesurable  $X$  d'un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  dans un espace mesurable  $(E, \varepsilon)$ . On dit que  $X$  est à valeur dans  $E$ . on notera  $V.a$  pour « variable aléatoire » et  $V.a.r$  pour « variable aléatoire réelle » (variable aléatoire à valeur dans  $\mathbb{R}$ ).

Dans toute la suite, si rien n'est précisé, le triplet  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  sera un espace probabilisé.

### Exemple

Soit  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 6\} \times \{1, 2, 3, \dots, 6\}$  munie de la tribu  $\mathcal{P}(\Omega)$  et de la mesure  $\mathcal{P}$  telle que  $\mathcal{P}((i, j))$  égale à  $\frac{1}{36}, \forall (i, j) \in \Omega$ . la mesure  $\mathcal{P}$  est une mesure de probabilité car  $\# \Omega = 36$ . l'ensemble  $\Omega$  est l'ensemble de combinaisons que l'on peut obtenir en jetant un dé deux fois (ensemble de toutes les possibilités). La quantité  $\mathcal{P}(3, 2) = \frac{1}{36}$  est la probabilité d'obtenir 3 puis 2. C'est du moins une modélisation raisonnable de ceux qui se passent quand on jette un dé deux fois.

Nous pouvons calculer les diverses quantités, en utilisant la propriété 2 de la définition d'une mesure :

- $\mathcal{P} \subset \{(1, 1), (2, 2)\} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$  est la probabilité d'avoir (1 puis 1) ou (2 puis 2)
- $\mathcal{P}\{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6)\} = \frac{6 \times 1}{36} = \frac{1}{6}$  est la probabilité d'avoir 1 au premier tirage.

Introduisant deux variables aléatoires :

$$X: (i, j) \in \Omega \rightarrow i \in \mathbb{R};$$

$$Y: (i, j) \in \Omega \rightarrow i + j \in \mathbb{R}.$$

La variable  $X$  est le résultat du premier tirage et  $Y$  est somme de deux tirages.

Remarquons aussi une variable aléatoire triviale :  $Z: (i, j) \in \Omega \rightarrow i, j \in \Omega$

### Définition 11

Soit  $X: \Omega \rightarrow (E, \varepsilon)$  une variable aléatoire. On appelle loi de  $X$ , la mesure  $\mathcal{P}_X$  sur  $(E, \varepsilon)$  définie par :  $\mathcal{P}_X(A) = \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}) = \mathcal{P}(X^{-1}(A))$ . (on rappelle par définition,  $\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$ ). On notera  $\mathcal{P}_X(A) = \mathcal{P}(X \in A)$ . c'est un abus de notation. La mesure  $\mathcal{P}_X$  est une mesure de probabilité.

### Exemple

Partant de l'exemple précédent, nous pouvons déduire complètement la loi de  $Y$  :

$$\mathcal{P}(Y)\{1\} = \mathcal{P}(y = 1) = \mathcal{P}(\emptyset) = 0. \mathcal{P}_Y\{2\} = \mathcal{P}(Y) = 2 = \frac{1}{36}, \quad \mathcal{P}_Y\{3\} = \mathcal{P}(Y) = 3 = \frac{2}{36} \dots$$

**Définition 12**

Soit  $X$  une V. a à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On appelle fonction de répartition associée) la mesure  $\mathcal{P}_X$ , c'est-à-dire la fonction  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : t \rightarrow F_X(t) = (]-\infty, t]) = \mathcal{P}(X \leq t)$

**Définition 13**

Soit  $X$  une V. a à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On dit que  $X$  a une densité  $f_X: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  si  $\emptyset$  mesurable,  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : E(\emptyset(X)) = \int_{\mathbb{R}^d} \emptyset(x) f(x) dx$ . Ceci implique en particulier,  $\mathcal{P}(X \in \beta) = \int_{\mathbb{R}^d} \emptyset(x) f_X(x) 1_B(x) dx$ . La densité de  $X$  est la densité de  $\mathcal{P}_X$

**Remarque**

Si  $X$  est une V. a. r avec une densité  $f_X$  alors  $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(u) du$ .

La densité d'une variable aléatoire détermine complètement sa loi.

Par définition, une densité  $f_X$  d'une V. a  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est toujours positive et vérifie  $\int_{\mathbb{R}^d} f_X(x) dx = 1$ .

**3. ESPÉRENCE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE****Définition 14**

Soit  $X$  une V. a. r on note :  $\mathbb{E}_X = \int_{\Omega} X(\omega) \mathcal{P}(d\omega)$  qui est bien définie dans le cas suivant :

- $X \geq 0$  (dans ce cas  $\mathbb{E}(X) \in [0, +\infty]$ )
  - $X$  de signe quelconque et intégrale sur  $\Omega$  de  $|X_\omega|$  probabilité de  $d\omega < \infty$ .
- On dit que  $X$  est intégrable si  $\mathbb{E}(|X|) < \infty$

**Remarque**

L'espérance mathématique est une intégrale. Voici les propriétés de cette intégrale avec le symbole  $\mathbb{E}$

**(i) linéarité :** si  $x$  et  $y$  sont deux V. a. r et  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $\mathbb{E}(ax + by) = a\mathbb{E}(x) + b\mathbb{E}(y)$

**(ii) croissante :**  $x$  et  $y$  sont deux V. a. r tels que  $x \leq y$ ,  $\mathbb{E}(x) \leq \mathbb{E}(y)$

**(iii) variable aléatoire constante :** si  $X$  est une V. a. r et  $a \in \mathbb{R}$ ;  $X(\omega) = a$ ,  $\forall \omega$ ,  $\mathbb{E}(X) = a$

**(iv)** si  $x$  et  $y$  sont deux V. a. r tels que  $x=y$  alors  $\mathbb{E}(x) = \mathbb{E}(y)$

**(V)** si  $x$  est une V. a. r à valeurs dans  $[0, +\infty]$  tel que  $\mathbb{E}(x) < \infty$ ,  $x$  est finie.

**Proposition 3**

Soit  $x$  une V. a à valeurs dans  $(E, \varepsilon)$ . Soit  $f$  mesurable définie  $\mathbb{E} \rightarrow [0, +\infty]$ . La fonction  $f(x): \omega \in \Omega \rightarrow f(x)(\omega) \in \mathbb{E}((F_x)) = \int_{\mathbb{E}} f(x) \mathcal{P}_x(dx)$

Si  $\mathbb{E} = \mathbb{R}^d$  et  $x$  a une densité  $g$  alors  $\mathbb{E}(f_x) = \int_{\mathbb{R}^d} f_x g(x) dx$ .

**Définition 15**

Si  $X$  une V. a. r telle que  $X^2$  est intégrable alors la variance de  $X$  est la quantité

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$$

$$\text{Propriété : } \text{Var}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

En effet,  $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2 + (\mathbb{E}(X))^2 - 2X\mathbb{E}(X))$ . (car  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ )

$$= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X))^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) \text{ (Linéarité de } \mathbb{E} \text{)}$$

$$= \mathbb{E}(X^2) + (\mathbb{E}(X))^2 - 2(\mathbb{E}(X))^2, \text{ (car } \mathbb{E}(a) = a \text{ et } \mathbb{E}(x) \text{ est une}$$

constante

$$= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \quad \text{CQFD}$$

### III. RÉSULTATS

#### III.1. Liaison entre la Théorie de Mesure et la Théorie de la Probabilité

##### III.1.1. Notions (M. METIVER, 1971, Page 25)

La théorie de probabilité s'est développée dans le but de modéliser les phénomènes aléatoires, c'est-à-dire de développer un formalisme mathématique pour exprimer les problèmes posés par ces phénomènes. Le terme aléatoire vient du latin « alea » qui signifie jeux de hasard.

Cependant, ce terme est employé pour désigner tous les phénomènes aléatoires et de nature discrète, c'est-à-dire qu'il existe une injection de l'ensemble de « k possibles » dans  $\mathbb{N}$ . Lorsque de plus l'ensemble de k possibles ou des éventualités est fini, le calcul de probabilité se ramène à des problèmes de dénombrement. Lorsque l'ensemble des éventualités est de nature infinie non dénombrable, on aura besoin, pour définir une probabilité, de la théorie mesure.

Les liens qui existent entre la théorie de probabilité et la théorie de mesure sont nombreux, mais malheureusement le vocabulaire est souvent différent. Dans les lignes qui suivent, nous essayerons de montrer clairement le lien entre les deux théories et de donner systématiquement le terme probabiliste et analyste employés pour les mêmes notions.

##### III.1.2. Mesure et Probabilité

La notion d'espace mesurable correspond à celle d'espace probabilisable en calcul de probabilité. En effet, E étant un ensemble quelconque et T une tribu en langage probabiliste, E est appelé l'univers des possibles, les éléments de E sont des éventualités, et ceux de T sont des événements.

<sup>1</sup>On appelle « événements élémentaires » un singleton appartenant à T. on dit que deux événements A et B appartenant à T sont compatibles si  $A \cap B \neq \emptyset$ , incompatibles si et seulement si  $A \cap B = \emptyset$

Une probabilité est un cas particulier d'une mesure. En effet, le couple (E, T) étant un espace mesurable, p étant une mesure sur T, p est une probabilité si et

<sup>1</sup> [https://lexique.netmath.ca/évènements\\_incompatibles/scolab](https://lexique.netmath.ca/évènements_incompatibles/scolab) : Évènements compatibles

seulement si  $p(E)=1$ . Il résulte de cela que la notion d'espace mesurable correspond bien à la notion d'espace probabilisé.

Il y a lieu de remarquer que si  $(E, T)$  est un espace probabilisable, on peut évidemment définir plusieurs probabilités sur  $T$ , c'est tout l'art de la modélisation que de choisir une probabilité qui rend compte du phénomène aléatoire que l'on veut observer. On se base pour cela souvent sur la notion des fréquences qui est une notion expérimentale à l'origine.

Soit  $A \in T$  un événement dont on cherche à évaluer la probabilité  $p(A)$ . On effectue pour cela  $N$  fois l'expérience dont l'univers de possibles est  $E$ , et on note  $N_A$  le nombre de fois où l'événement  $A$  est réalisé.  $N$  fixé, on définit alors la fréquence  $f_N(A)$  de l'événement  $A$  par :

$$f_N(A) = \frac{N_A}{N}$$

Expérimentalement, il s'avère que  $f_N(A)$  admet une limite lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ . C'est ce qu'on appelle la loi empirique de grand nombre. On peut donc définir expérimentalement  $p(A) = \lim_{N \rightarrow +\infty} f_N(A)$ . Cependant, on n'a pas ainsi démontré que  $p$  est une probabilité. Il s'agit pour l'instant que d'une approche intuitive. On peut remarquer que  $f_N(E) = \frac{N}{N} = 1$

Exemple

Soit  $(E, T, p)$  un espace probabilité. On suppose que tous les singletons appartiennent à la tribu et que les événements élémentaires sont équitables. On a alors

$$p\{x\} = \frac{1}{\#E}, \forall x \in E$$

### III.2. De l'Événement Indépendant et Tribus Indépendante

Soit  $(E, T, p)$  un espace probabilisé. On dit que deux événements sont indépendants si  $p(A).p(B) = p(A \cap B)$ . Lors de la modélisation d'un phénomène aléatoire, il y a des événements qui semblent a priori indépendants c'est-à-dire la réalisation de l'un semble n'avoir aucune influence sur la réalisation de l'autre. On choisira alors pour le modèle probabiliste, une probabilité qui respecte cette indépendance.

Toutefois, pour une probabilité  $p$  donnée, deux événements peuvent être indépendants. On généralise la notion de l'indépendance de deux événements en introduisant la notion de l'indépendance de tribus.

**Définition 16 :** (indépendance des tribus)

Soit  $(E, T, p)$  un espace probabilisé et  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  une suite des tribus incluses dans  $T$ . alors :

1. Soit  $N > 1$ , on dit que les  $N$  tribus  $T_k; k = 1, \dots, N$ , sont indépendantes (on dit aussi que la suite  $T_1, \dots, T_N$ , est indépendante) si pour toute famille  $(A_1, \dots, A_N)$  d'événements tels que  $A_k \in T_k$  pour  $k = 1, \dots, N$ . On a :

$$p\left(\bigcap_{k=1}^N A_k\right) = p(A_1).p(A_2) \dots p(A_N)$$

2. On dit que la suite  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  est indépendante (ou que les tribus  $T_1, T_2, \dots, T_N, \dots$  sont indépendantes) si  $\forall N > 1$ , les  $N$  tribus  $T_k, k = 1, \dots, N$ , sont indépendantes.

On peut facilement remarquer que si  $A$  et  $B$  sont deux événements d'un espace probabilisé  $(E, T, p)$ , alors ils sont indépendants au sens de la première définition si et seulement si les tribus  $T_A = \{\emptyset, E, A^c\}$  et  $T_B = \{\emptyset, E, B^c\}$  sont indépendantes.

Par contre, si  $A, B$  et  $C$  sont trois événements d'un espace probabilisé  $(E, T, p)$ , le fait que  $p(A \cap B \cap C) = p(A).p(B).p(C)$  n'implique pas que les tribus  $T_A, T_B$ , et  $T_C$  sont indépendantes.

En effet, Il suffit, par exemple, de considérer le cas où  $C = \emptyset$  et  $A = B$  avec  $p(A) \in ]0, 1[$ .

**Définition 17 :** (événements indépendants)

Soient  $(E, T, p)$  un espace probabilisé et  $A_k (k = 1, \dots, N)$  des événements, on dit que les  $N$  événements  $(A_k, k = 1, \dots, N)$  sont indépendants si les  $N$  tribus engendrées par les événements  $A_k; k = 1, \dots, N$  (c'est-à-dire les  $N$  tribus définies par  $T_k = \{A_k, A_k^c, E, \emptyset\}$  pour  $k = 1, \dots, N$ ) sont indépendantes.

Sous les hypothèses de la définition précédente, on peut remarquer que les événements  $A_1, \dots, A_N$  sont indépendants, (c'est-à-dire que les tribus engendrées par  $A_1, \dots, A_N$  sont indépendantes) si et seulement si :

$$p\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} p(A_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

**Proposition 4**

Soit  $(E, T, p)$  un espace probabilisé.

1. Soit  $N > 1$  et  $(T_k)_{k \in \{0, 1, \dots, N\}}$  une suite indépendante de tribus incluses dans  $T$ . La tribu  $T_0$  est alors indépendante de la tribu engendrée par les tribus  $T_1, \dots, T_n$ .
2. Soit  $N > 1$  et  $q > 1, n_0, n_1, \dots, n_q$  telque  $n_0 = 0, n_1 \leq n_{i+1}$   
(Pour  $i = 0, \dots, q - 1$ ),  $n_q = N$  et  $(T_k)_{k \in \{0, 1, \dots, N\}}$ , une suite indépendante de tribus incluses dans  $T$ . Pour  $i = 1, \dots, q$  on note  $\mathcal{T}_i$  la tribu engendrée par les tribus  $T_n$  pour  $n = n_{i-1}, \dots, n_i$ . Alors les tribus  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_i$  sont indépendantes.

### III. 4. Fonctions Mesurables et Variables Aléatoires

Nous montrons dans les lignes qui suivent que la notion des fonctions mesurables dans la théorie des mesures est le correspondant de la notion des variables aléatoires en calcul de probabilité.

La notion des variables aléatoires est fondamentale en calcul de probabilité : c'est en général par la connaissance de la variable aléatoire (et par sa loi de probabilité) que se construit le modèle probabiliste, l'espace probabilisé  $(E, T, p)$  restant souvent mal connu.

**Définition 18 :** (variable aléatoire et vecteur aléatoire)

Soient  $(E, T)$  et  $(F, \mathcal{T})$  deux espaces probabilisables.

Une fonction  $X$  définie  $E \rightarrow F$  est une variable aléatoire si c'est une fonction  $(F, \mathcal{T})$ -mesurable (c'est-à-dire si  $X^{-1}(A) \in \mathcal{T}, \forall A \in \mathcal{T}$ ). Lorsque  $F$  est un espace vectoriel, on dit que  $X$  est une variable aléatoire vectorielle.

**Définition 19:** (variables aléatoires indépendantes)

Soit  $(E, \mathcal{T}, p)$  un espace probabilisé.

1. Soit  $N > 1$  et  $X_1, \dots, X_N$  une famille de variables aléatoires réelles. On dit que  $X_1, \dots, X_N$  sont indépendantes (ou que la famille  $(X_1, \dots, X_N)$  est indépendante si les tribus engendrent  $X_1, \dots, X_N$  (on notera souvent  $\mathcal{T}(X)$  la tribu engendrée par la variable aléatoire  $X$ ) sont indépendantes.
2. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite des variables aléatoires réelles. On dit que cette suite est indépendante si  $\forall N > 1$ , les v.a  $X_1, \dots, X_N$  sont indépendantes.  
On appelle « suite de v. a. r. i. i. d » une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuée.

(Ce dernier point signifiant que toutes les v. a de la suite ont même loi).

Soit  $(E, \mathcal{T}, p)$  un espace probabilisé et  $X_1, X_2, X_3$  trois v.a.r. le fait que  $X_1$  soit indépendante de  $X_2$  et  $X_3$  n'implique pas que  $X_1$  soit indépendante de  $X_2 + X_3$ , même si  $X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes. Mais on a bien  $X_1$  indépendante de  $X_2 + X_3$  si la famille  $(X_1, X_2, X_3)$  est indépendante. Ceci est une conséquence de la proposition suivante :

**Proposition 5 :** (indépendance et composition)

Soit  $(E, \mathcal{T}, p)$  un espace probabilisé,  $n \geq 1, m \geq 1$  et  $X_1, \dots, X_n; y_1, \dots, y_m$  des v. a. r. i. Soit  $\varphi$  une fonction borélienne de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\Psi$  une fonction borélienne de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors, les v. a. r  $\varphi(X_1, \dots, X_n)$  et  $\Psi(y_1, \dots, y_m)$  sont indépendantes. Nous avons ici décomposé la famille initiale des v. a. r. i en deux groupes.

En effet, la notion  $\varphi(X_1, \dots, X_n)$  désigne la composition de  $\varphi$  (qui va de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ ) avec l'application de  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$  donnée par  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

La tribu engendrée par  $\varphi(X_1, \dots, X_n)$  est incluse dans la tribu engendrée par  $X_1, \dots, X_n$  (c'est-à-dire la tribu engendrée par les tribus  $\mathcal{T}(X_1), \dots, \mathcal{T}(X_n)$ , ce que nous démontrons maintenant.

On note  $\mathcal{T}$  la tribu engendrée par  $X_1, \dots, X_n$  et  $X$  l'application  $E$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui à  $\omega \in E$  associe  $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ . On voit que  $\{A \in \beta(\mathbb{R}^n) \text{ tq } X^{-1}(A) \in \mathcal{T}\}$  est une tribu sur  $\mathbb{R}^n$ .

Si  $A = \prod_{i=1}^n (A_i) \in \mathcal{T}$  (car  $X_i^{-1}(A_i) \in \mathcal{T}(X_i)$  et donc à  $\mathcal{T}$ ).

Comme  $\beta(\mathbb{R}^n)$  est engendré par l'ensemble des produits boréliens de  $\mathbb{R}$  (et même par l'ensemble des produits que  $(A \in \beta(\mathbb{R}^n) \text{ tq } X^{-1}(A) \in \mathcal{T})$  contient  $\beta(\mathbb{R}^n)$ .

$\forall B \in \beta(\mathbb{R})$  on a donc  $(\varphi(X))^{-1}(B) = X^{-1}(\varphi^{-1}(B)) \in \mathcal{T}$ ; car  $\varphi^{-1}(B) \in \beta(\mathbb{R}^n)$  (Puisque  $\varphi$  est borélienne), ce qui prouve bien que la tribu engendrée par  $\varphi(X_1, \dots, X_n)$  est incluse dans la tribu engendrée par  $X_1, \dots, X_n$ .

### **Théorème 1**

Soit  $X$  et  $Y$  deux v. a. r définies par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ . Alors la v. a  $y$  mesurable par rapport à la tribu engendrée par  $X$  (notée  $\mathcal{T}(X)$ ) si et seulement s'il existe une fonction borélienne  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  tel que  $y=f(X)$  (c'est-à-dire  $y = f \circ X$ ).

**Démonstration**

Montrons d'abord si  $y$  est de la forme  $y=f(X)$  où  $f$  est une fonction borélienne de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $y$  est  $\mathcal{T}(X)$  mesurable.

En effet, on sait déjà que  $\mathcal{T}(X) = \{X^{-1}(B), B \in \beta(\mathbb{R})\}$ .

Soit  $B \in \beta(\mathbb{R})$  on a  $y^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B))$ . Comme  $f$  est borélienne (c'est-à-dire mesurable de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  où  $\mathbb{R}$  est muni de la tribu borélienne)

On a :  $f^{-1}(B) \in \beta(\mathbb{R})$  et donc,  $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{T}(X)$ . Ce qui prouve que  $y$  est  $\mathcal{T}$  de  $X$ -mesurable.

Supposons que  $y$  est  $\mathcal{T}$  de  $X$ -mesurable et qu'il existe une suite de réelles  $(A_j)$  tel que  $A_j \neq A_k$  pour  $j \neq k$  et une suite d'événements  $(A_j)$  disjoints deux à deux tel que

$$y = \sum_j a_j 1_{A_j} \text{ et } \bigcup_j A_j = \Omega.$$

Montrons que  $\forall j, A_j \in \mathcal{T}(X)$  qu'il existe une fonction borélienne  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tq  $y = f(X)$

En effet, soit  $j \in \mathbb{N}$ . Comme les  $A_i$  sont disjoints deux à deux,  $a_i \neq a_k$  si  $i \neq k$  et  $\bigcup_i A_i = \Omega$ , on a :  $A_j = y^{-1}(\{a_j\})$ . Comme le  $\{a_j\} \in \beta(\mathbb{R})$  et  $y$  est  $\mathcal{T}$ -mesurable, on en déduit que  $A_j \in \mathcal{T}(X)$  (rappelons aussi que  $\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{A}$  car  $X$  est une v. a sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ).

$\forall i$ , il existe  $B_i \in \beta(\mathbb{R})$  tq  $A_i = X^{-1}(B_i)$  (car  $A_i \in \mathcal{T}(X)$ ). Comme les  $A_i$  sont disjoints deux à deux, on a : si  $i \neq j$ ,  $B_i \neq B_j \cap \text{Im}(X) = \emptyset$  (avec  $\text{Im}(X) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ ). On peut donc supposer les  $B_i$  disjoints deux à deux en remplaçant chaque  $B_i$  ( $i > 0$ ) par  $B_i - \bigcup_{j < i} B_j$ .

On pose  $f = \sum_i a_i 1_{B_i}$ . La fonction  $f$  est bien une fonction borélienne de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $\omega \in \Omega$ , il existe  $i$  tq  $\omega \in A_i$  (car  $\Omega = \bigcup_i A_i$ ), on a donc  $X(\omega) \in B_i$  et donc  $f(X(\omega)) = a_i = y(\omega)$ . Ce qui donne bien  $f(X) = y$ .

Soient  $(E, \mathcal{T})$  et  $(F, \mathcal{T})$  deux espaces mesurables (l'exemple fondamental est  $(F, \mathcal{T})$  égal  $(\mathbb{R}, \beta_{\mathbb{R}})$  et  $f$  une fonction mesurable de  $E$  vers  $F$ . si  $m$  est une mesure  $\mathcal{T}$ , alors on peut définir à partir de  $f$  et  $m$ , une mesure sur  $\mathcal{T}$  de la manière suivante.

**Proposition 20** : (mesure image)

Soient  $(E, \mathcal{T}, m)$  un espace mesuré,  $(F, \mathcal{T})$  un espace mesurable et  $f$  une fonction mesurable de  $E$  vers  $F$ . alors, l'application  $m_f$  définie de  $\mathcal{T}$  dans  $\mathbb{R}^+$  par :

$$m_f(A) = m(f^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{T},$$

est une mesure sur  $\mathcal{T}$ , appelé mesure image par  $f$ .

En effet,  $m_f$  est bien définie et  $m_f(\emptyset) = 0$ ;  $m_f$  est  $\sigma$ -additive ; toutes ces propriétés découlent naturellement de celle de  $m$ .

**Définition 21** : (loi de probabilité)

Soit  $(E, \mathcal{T}, p)$  un espace probablisé,  $X$  une v. a réelle (c'est-à-dire une fonction mesurable de  $E$ , munie de la tribu  $\mathcal{T}$ , dans  $\mathbb{R}$ , munie de la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ ).

On appelle loi de la probabilité de la variable aléatoire  $X$ , la probabilité  $p_X$ , l'image de  $p$  par  $X$ . (cette probabilité est donc définie sur la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ ).

On appelle fonction de répartition de la v. a.  $X$ , la fonction de répartition de la probabilité  $p_X$ .

Un exemple simple de la loi de probabilité est la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Elle est définie par  $p(A) = \lambda(A \cap [0, 1])$ ,  $\forall A \in \beta_{\mathbb{R}}$ . Si  $X$  est une v. a. réelle (sur l'espace probabilité  $(E, T, p)$ ).

On dit que  $X \sim u([0, 1])$  si  $p_X = p$ . Si  $X$  et  $Y$  sont deux v. a. r, on dit que  $X \sim Y$  si  $p(X) = p(Y)$ , le symbole  $\sim$  signifie donc « a pour loi » ou « a même loi que ».

De ce qui précède, on déduit clairement que la notion de mesure (image de la théorie de mesure) correspond bien à la notion de loi de probabilité en langage probabiliste.

#### IV. CONCLUSION

Dans cet article nous avons montré la possibilité d'exprimer la notion de hasard par la théorie de mesure ; et ainsi montrer à partir de plusieurs correspondances qu'une probabilité est une mesure. C'est dans ce cadre que nous avons parlé des liens entre la théorie de mesure et la théorie de la probabilité.

Quelques propositions nous ont été utiles dans l'expression du passage de la théorie de mesure à la probabilité. En guise d'éclaircissement,  $E$  étant un ensemble quelconque et  $T$  une tribu en langage probabiliste,  $E$  est appelé l'univers des possibles, les éléments de  $E$  sont des éventualités, et ceux de  $T$  sont des événements. Cela nous amène à dire qu'une probabilité est un cas particulier d'une mesure. En effet, le couple  $(E, T)$  étant un espace mesurable,  $p$  étant une mesure sur  $T$ ,  $p$  est une probabilité si et seulement si  $p(E)=1$ . Il résulte de cela que la notion d'espace mesurable correspond bien à la notion d'espace probabilisé ; ce qui exprime bien le passage de la mesure à la probabilité.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. AMAURY LAMBERT, *Théorie de la mesure et intégration*, Université Pierre-Marie GAURIE ; Paris, 2010-2011 ;
2. GILLES BAILLY MAITRE, *Introduction à la théorie de la mesure-Lebesgue*, maths pour adultes, université de Rochelle
3. J. GENET, *Mesure et intégration*, Vuibert, Paris, 1976.
4. J. ROGER, *Mesure et intégration*, PUQ, Québec, 1980
5. M. METIVER, *Notion fondamentale de la théorie des probabilités*, Dunod, Paris, 1971 ;
6. N. BOURBAKI, *Intégration*, Hermann, Paris, 1972 ;
7. O. ARINO et Ali, *Mesure et Intégration*, Vuibert, Paris, 1965 ;
8. Pierre DL MORAL, BRUNO REMYARD AND Silvain RIBENTHALER, *Introduction à la probabilité*, Ellipse, Paris, 2006
9. SEYMOUR LIPCHITZ, *Probabilité, cours et problèmes*, MCGRAW-Hill, Paris et New York, 1973.
10. THIERY GALLAY, *Théorie de la mesure et de l'intégration : introduction monotonie*
11. [https://lexique.netmath.ca/évènements\\_incompatibles/scolab](https://lexique.netmath.ca/évènements_incompatibles/scolab) : Évènements compatibles