DES TRANSFORMATIONS DU PLAN DANS LA CONSTRUCTION DES FRISES GÉOMETRIQUES.

DUKUZE FAZILI André*, DUSENGIMANA BIVUZEMENSHI Prosper, SAFARI NTAKAMARO Marc***, et TUMUSIFU SENYONI Sadok******

Résumé

Dans cet article, on trouvera une brève révision des transformations géométriques dont la translation, la rotation, la réflexion ainsi que la symétrie glissée. Chaque transformation géométrique est définie et représentée en images. Il se trouve dans les constructions et dans les ornements, des constructions d'objets géométriques nécessitant de transformations du plan pour une présentation esthétiquement attrayante. Les frises géométriques apparaissent dans l'art et on en trouve dans presque toutes les civilisations. Elles constituent un domaine mathématique relativement simple qui permet de s'initier au pavage et d'employer l'outil « isométries » tout en représentant un aspect artistique intéressant

Cette recherche se donne comme objectif de faire connaitre l'usage des transformations du plan dans la construction des frises et ainsi en donner certaines applications dans le pavage et dans le dallage. Toutefois, avant de poursuivre dans le vif du sujet, une révision des transformations géométriques s'impose.

Mots clés : *transformations du plan, symétrie, translation, rotations, frises mathématiques, pavages, dallages*

TRANFORMATIONS OF THE PLAN IN THE CONSTRUCTION OF GEOMETRIC FRIEZES

Abstract

In this article we will find a brief review of geometric transformations including translation, rotation, reflection and sliding symmetry. Each geometric transformation is defined and represented in images. It is found in constructions and in ornaments, constructions of geometric object srequiring transformations of the plan for an aesthetically appealing presentation. Geometric friezes appear in art and are found in almost all civilizations. They constitute a relatively simple mathematical domain which

* Chef de Travaux à l'Institut Supérieur Pédagogique de MATANDA (ISP/MATANDA), Département de Mathématique-Physique, Tel : +243995497777 ; E-mail : fazilidukuze@gmail.com

** Assistant à l'Institut Supérieur Pédagogique de Goma (ISP/GOMA), Département de Mathématique-Physique, Tel : +243898028433 ; E-mail : prosperbayizere@gmail.com

*** Assistant à l'Université de Goma (UNIGOM) ; faculté de Sciences agronomiques ; Tel : +243977507027 ; E-mail : marcsafri@gmail.com

**** Assistant à l'Institut Supérieur Pédagogique de KICHANGA (ISP/KICHANGA), Département de Mathématique-Physique, Tel : +243896350652 ; E-mail : sadoktumusifu86@gmail.com

makes it possible to learn about tiling and to use the "isometric" tool while representing an interesting artistic aspect.

This research aims to make known the use of plane transformations in the construction of friezes and thus give certain applications in paving and tiling. However, before continuing to the heart of the matter, a review of the geometric transformations is necessary.

Keywords: *plane transformations, symmetry, translation, rotations, mathematical friezes, tilings, tessellations*

I. INTRODUCTION

Le monde est construit par les mathématiques que beaucoup ne connaissent pas. Parmi ces mathématiques qui sont méconnues par grand nombre de gens alors que, utiles dans le quotidien, il y a les transformations de plan (les rotations, les translations et les isométries) dont les applications observables sont multiples dans notre environnement.

L'histoire des transformations est relativement récente. En effet, les géomètres et mathématiciens ne se sont vraiment intéressés à ces applications qu'à la fin du XVIIIe siècle. C'est à cette période que les français Jean Victor Poncelet et Michel Chasles voient en elles de nouveaux outils de démonstration.

Les transformations de plan jouent un rôle important dans la démonstration en géométrie.
Elles permettent d'initier les apprenants au raisonnement déductif et de proposer des modèles dans l'industrie.

On se poserait la question de savoir quelle est la part des mathématiques dans la construction de ces objets fascinants que nous rencontrons dans la vie courante, et plus précisément, la question de savoir s'il est possible de construire ces frises à l'aide des mathématiques.

Ainsi pouvons-nous formuler la question de la manière suivante : *« les frises sont-elles réellement des objets qui ont un lien avec un domaine de mathématique et plus généralement de la géométrie ? Si oui, quelles sont les transformations géométriques sous-jacentes qui permettent de construire les frises ? »*
Le mot frise a plusieurs significations selon le domaine dans lequel il est utilisé. Au théâtre, une frise est un décor représentant le ciel ou le plafond. En architecture, la frise est une partie de l'entablement qui est entre l'archivage et la corniche. Une frise chronologique est une ligne de temps. C'est une représentation linéaire qui associe des événements à leur position dans le temps, le long d'une échelle graduée. La frise dont nous parlerons dans cet article est une bande rectangulaire illimitée sur laquelle des motifs apparaissent linéairement de façon répétitive suivant une régularité définie à partir d'un motif de base. Les frises constituent un domaine mathématique relativement simple qui permet de travailler les isométries, tout en présentant un aspect artistique intéressement élégant. Or, les frises mathématiques, non connues par beaucoup de gens,

ne peuvent en aucun cas être construites sans usages de transformations du plan. Autrement dit, les transformations du plan sont très utiles dans la vie quotidienne et spécialement dans la construction des frises mathématiques dont les applications sont visibles dans les domaines des arts et de l'architecture.

Les frises sont des objets mathématiques inventés vers les années 70 par les mathématiciens britanniques messieurs COXETER et CONWAY. L'idée de la création des Frises part juste d'une construction amusante. Elles connaissent néanmoins un regain d'intérêt depuis le récent développement de la théorie de l'algèbre amusée.
Les frises constituent un domaine mathématique relativement simple qui permet de s'initier au pavage et d'employer l'outil : « isométries » tout en représentant un aspect artistique intéressant.

Dans cet article, nous voulons faire connaitre l'usage des transformations de plan dans la construction des frises mathématiques et par suite en présenter certaines applications plus particulièrement dans le pavage et le dallage. L'intérêt de cet article est qu'il va mettre à la disposition des intéressés, des éléments palpables qui montrent l'importance des notions géométriques dans certains domaines de la vie quotidienne et plus précisément montrer que les transformations de plan interviennent dans le domaine artistique et particulièrement dans la construction des frises.

II. MÉTHODES ET MATÉRIELS

II.1. Approche méthodologique et technique

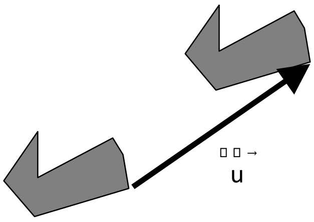
Pour bien mener à terme cette recherche, nous avons utilisé la méthode analytique, celle-ci a été solidifiée par la technique documentaire qui nous a amené à compiler des notions dont le travail avait besoin et les présenter d'une manière très structurée et logique dans le souci de faire voir les transformations géométriques dans la construction de ces objets artistiques et décoratifs qui sont les frises mathématiques.

II.2. Généralités sur les transformations du plan

Les transformations du plan sont généralement des applications bijectives du plan dans lui-même dont l'étude permet aux apprenants de parfaire l'utilisation des instruments de mesure et de dessin et conjointement de s'entraîner au raisonnement déductif. Pour ce faire une bonne implication des apprenants dans l'installation de ces outils mathématiques est nécessaire. Les transformations de plan auxquelles nous feront allusions sont : les translations, les rotations et les symétries dont l'usage est une condition dans la construction des frises mathématiques.

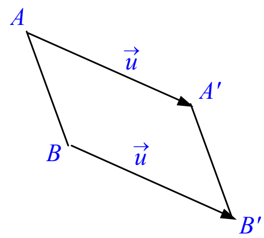
1. Translation

L'image d'un point M par la translation de vecteur AA' est le point M' tel que les demi-droites [AA') et [MM') sont parallèles et de même sens [AA'] et [MM'] ont la même longueur. On dit que M' est le translaté de M .
Par translation, une figure et sa translatée se superposent en glissant le long de la direction. Définir une translation, c'est définir le vecteur de translation.



Le point M a pour image le point M' par la translation de vecteur $\vec{u}$ signifie que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. On note $M' = t_{\vec{u}}(M)$ (dans ce cas, M est l'antécédent de M' par $t_{\vec{u}}$)

Décrire précisément une translation, c'est donc décrire : la longueur de la flèche; sa direction et son sens.



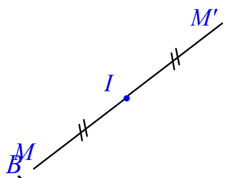
De façon grossière, il s'agit simplement de déplacer une figure simplement en la « glissant » sans modifier son orientation.

Lors d'une translation, on glisse une figure sur une certaine distance.

La figure image conserve les mêmes caractéristiques que la figure initiale (mesures de côtés et d'angles). Dans ce cas, on parle d'une transformation isométrique.

1. **La Symétrie Centrale**

Le point M a pour image le point M' par la symétrie de centre I signifie que I est le milieu de $[MM']$.

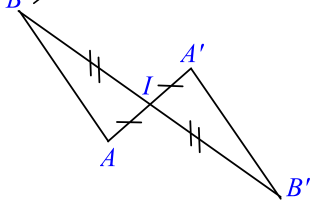


On note $M' = s_I(M)$

•I est l'unique point invariant de s_I.

• Si $M' = s_I(M)$ alors $M = s_I(M')$

Propriétés de la symétrie centrale



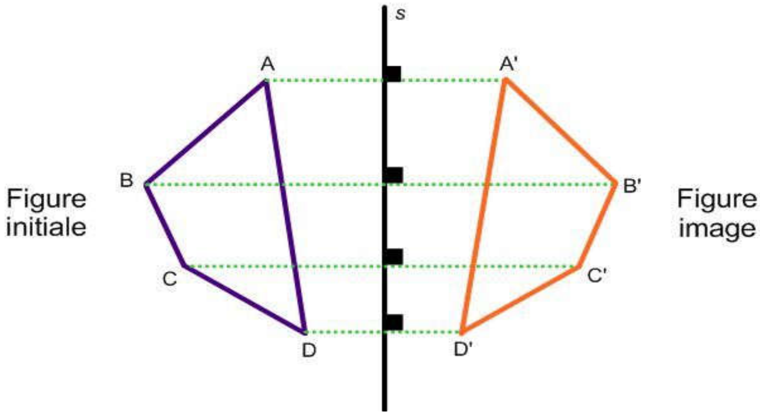
Si $A' = s_I(A)$ et $B' = s_I(B)$ alors $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$

$ABA'B'$ est un parallélogramme de centre I.

2. **La Réflexion**

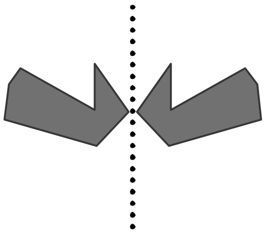
Cette transformation géométrique est littéralement associée avec les propriétés d'un reflet dans un miroir. Une **réflexion** est une transformation géométrique qui donne lieu à une image miroir de la figure initiale.

En suivant cette définition, la figure image est inversée par rapport à la figure initiale.



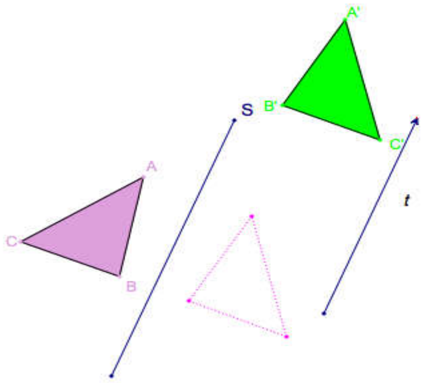
3. **La Symétrie Axiale**

Deux points A et B sont symétriques par rapport à une droite (d) si (d) est la médiatrice de [AB] ; c'est à dire si (d) est perpendiculaire à [AB] en son milieu.
Par symétrie axiale, une figure et sa symétrique se superposent en pliant le long de l'axe de symétrie. Définir une symétrie axiale, c'est définir l'axe de symétrie.



5. La Symétrie Glissée

La symétrie glissée est une transformation du plan qui équivaut à une réflexion d'axe s, suivie d'une translation parallèle à cet axe.

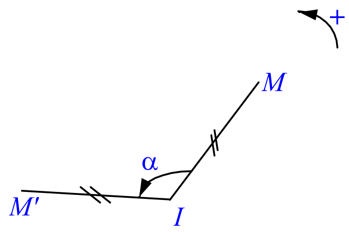


6. La Rotation

Une rotation est une transformation géométrique qui consiste à faire tourner une figure autour d'un point ou d'un axe selon un angle donné α.
Un point M a pour image le point M' par la rotation de centre I et d'angle α signifie que :M = M' si M = I

IM = IM' et α (en respectant l'orientation des angles) si M ≠ I

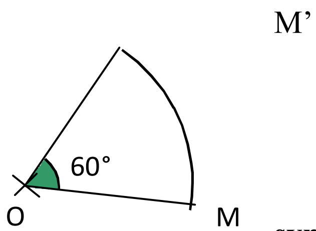
On note $M' = R(I,\alpha)$ ou plus simplement $M' = R(M)$



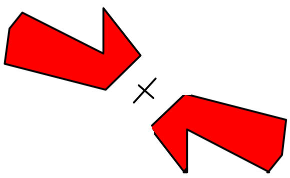
- Si $\alpha \neq 0°$ alors le centre I est l'unique point invariant de $R(I,\alpha)$
- Si $\alpha = 180°$ alors $R(I,180°)$ est la symétrie de centre I
- Si $\alpha = 90°$ ou -90° alors $R(I,\alpha)$ correspond à un quart de tour
- Si $\alpha = 0°$ alors tout point est invariant, $R(I,0°)$ est l'application identique du plan.

Pour un point O et un angle α donnés, la rotation de centre O et d'angle α fait tourner un point M sur le cercle de centre O et de rayon OM, de telle sorte que l'angle MOM' soit égal à l'angle α

Définir une rotation, c'est définir le centre et l'angle de la rotation.



Une **symétrie centrale** est une rotation particulière pour laquelle l'angle est 180°



II.3. Propriétés de Transformations

Une isométrie de plan est une transformation de plan qui conserve les distances précisément pour tous les points A et B, d'image respectives A' et B' ; A'B' = AB.

Une isométrie est une transformation qui conserve les distances (et donc les aires et les volumes)

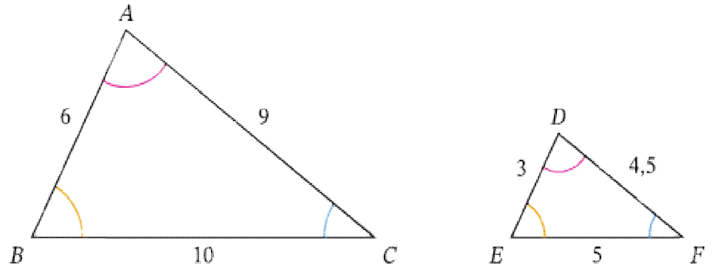
Les translations, les réflexions, les rotations et les symétries centrales sont des isométries. Pour celles-ci, les longueurs sont conservées, les angles sont conservés et les aires sont conservées.

Une **similitude** est une transformation qui multiplie toutes les distances par une constante fixe, appelée son rapport. L'image de toute figure par une telle application est une figure *semblable*, c'est-à-dire intuitivement « de même forme ».

Prenons l'exemple de similitude des triangles : Plus familièrement, on pourrait dire que des triangles semblables ont la même forme, mais ils peuvent avoir une taille différente. Par ailleurs, les triangles de même forme et de même taille sont dits superposables.

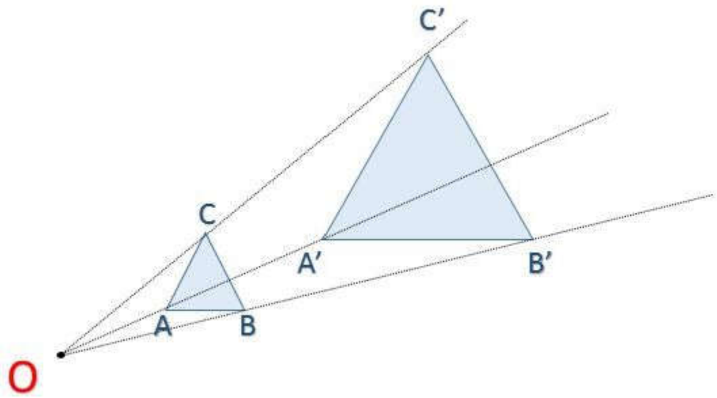
Voici un exemple de deux triangles semblables.

Les paires d'angles des sommets A et D, B et E et C et F sont de même mesure. Les longueurs de côtés correspondants, AB et DE, AC et DF et BC et EF, sont proportionnelles. Dans cet exemple, on peut préciser que le rapport de $\triangle ABC$ à $\triangle DEF$ est 12



L'**homothétie** est une transformation géométrique qui consiste à agrandir ou à réduire une figure selon un rapport d'homothétie et un centre d'homothétie.
En considérant un réel k non nul. Le point M a pour image le point M' par l'homothétie de centre O et de rapport k ($h_{(O,k)} : M \rightarrow M'$) signifie que $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$
Point invariant :
- Si $k \neq 1$, le centre O est le seul point invariant.
- Si $k = 1$, tout point du plan est invariant ; $h_{(O,1)}$ est l'application identique du plan.

Cas particulier : Si $k = -1$, $h_{(O,-1)}$ est la symétrie de centre O.
Pour sa part, l'homothétie est la seule transformation géométrique qui modifie les caractéristiques de la figure initiale.



La figure image obtenue par homothétie conserve les mêmes mesures d'angles intérieurs. Cependant, les côtés homologues n'ont pas la même longueur, mais le rapport de grandeur demeure constant entre tous les côtés homologues.

Une translation, une rotation, une homothétie conservent les angles orientés tandis qu'une réflexion transforme un angle orienté en son opposé.
Des figures planes sont isométriques si et seulement s'il existe une isométrie ou une composition d'isométries qui associe une figure à l'autre.
Des figures planes sont semblables si et seulement s'il existe une similitude qui associe une figure à l'autre.

Une transformation géométrique consiste à déplacer une figure initiale ou à en changer les dimensions pour obtenir une figure image.

II. 4. Éléments Constructifs des Frises Géométriques

II.4.1. Définitions de quelques concepts

1) On appelle bande du plan (ou ruban) la zone comprise entre deux droites parallèles. On appelle l'âme de la bande l'axe de symétrie de deux droites parallèles définissant la bande.
2) Un motif est un dessin utilisé comme objet de base servant à produire les figures isométriques répétées pour découvrir une surface comme pavage ou pour créer une bordure comme une frise ou ensemble de nombres utilisés pour suggérer une suite numérique.
3) On appelle motif de base, le motif associé à la translation la plus courte pour répéter un motif de la bande. Celui-ci peut être obtenu à partir d'un motif élémentaire auquel on a appliqué des symétries axiales, symétries centrales, translation ou rotation
4) Une frise est une bande du plan dans laquelle un motif (figure du plan) se répète régulièrement par une même translation. C’est aussi la figure obtenue en répétant un motif de base par des applications successives d’une même translation
5) On appelle Groupe d’une frise l’ensemble des transformations du plan qui laissent la frise invariante
6) On appelle maille d’une frise $\mathcal{F}_{\vec{u}}$ la partie de la frise contenue dans un parallélogramme $ABCD$ de cotés $[AB]$ et $[DC]$ portés par les droites D_1 et D_2 frontières de la bande et vérifiant :
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \vec{u}$$
7) Un motif d’une frise $\mathcal{F}_{\vec{u}}$ est une partie minimale de la maille qui permet de construire la frise en faisant agir les isométries conservant $\mathcal{F}$. On dit que $\vec{u}$ est un vecteur minimal de la frise et on note $\mathcal{F}_{\vec{u}}$ une frise de vecteur minimal $\vec{u}$.
8) Un Ensemble translaté de base d'une frise est une partie E du plan, fermée (c'est-à-dire contenant sa frontière), connexe (c'est-à-dire d'un seul tenant), ayant la propriété suivante : Les translatés de E par les translations de vecteurs $k\vec{u}$ avec k entier relatif, recouvrent totalement la bande B, sans laisser de vide, et sans empiéter l'un sur l'autre, sinon par leurs frontières. Autrement dit, les translatés de E réalisent un pavage de la bande, invariant par les mêmes translations que le dessin lui-même.
9) La frontière de P est l'ensemble des points qui sont "au contact" aussi bien de E que de son complémentaire.
10) L'intérieur d'un ensemble P est l'ensemble des points de P qui ne sont pas sur sa frontière.
11) On dit qu'un ensemble P est un fermé lorsqu'il contient sa frontièreF.

Exemple **:** Considérons P la réunion d'un disque ouvert et d'un demi-périmètre de ce disque. La frontière de P est le cercle en son entier et l'intérieur de P est le disque ouvert (sans le cercle). P n'est pas fermé parce qu’il ne contient pas sa frontière.

II.4.2. Isométrie de la Frise

Ici il importe pour nous de présenter certaines définitions :

1) On dit qu'une transformation f est une isométrie de la frise D si f laisse invariant aussi bien la bande B que le dessin D. Autrement dit si on a à la fois : f(B) = B et f(D) = D.
2) On dit qu'une isométrie ϕ est une isométrie de la frise $\mathcal{F}$ désignée dans la bande $\mathcal{B}$ si :
   i) L'image de la bande $\mathcal{B}$ par ϕ est égale à $\mathcal{B}$.
   ii) La frise $\mathcal{F}$ est invariante par ϕ

On s'intéresse maintenant aux isométries qui conservent la frise (c'est-à-dire qui laissent invariant la frise$\mathcal{F}_{\vec{u}}$.). Parmi les isométries nous trouvons évidemment des translations, les rotations, les réflexions et les symétries centrales.

3) Un pavage est un recouvrement du plan sans espace et sans chevauchement. Il y a une infinité de façons d'y parvenir mais les pavages les plus intéressants sont ceux dans lesquels on détecte une règle de construction et des symétries.
4) On dit que des sous-ensembles d'un ensemble E réalisent un pavage de E si les conditions suivantes sont réunies :
   - Chacun de ces sous-ensembles est un fermé d'intérieur non vide.
   - La réunion de ces sous-ensembles est égale à E.
   - Deux quelconques de ces sous-ensembles ont toujours une intersection vide, ou une intersection contenue dans leur frontière.

Lorsque des sous-ensembles de E réalisent un tel pavage de E, on les appelle des pavés. En général, l'ensemble E qui est pavé est le plan. Mais E peut-être aussi une bande dans le plan (cas des frises), la surface d'une sphère ou l'espace à trois dimensions.

III. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS ET DISCUSSION

III.1. Les Pavages du Plan

(Pierre de la Harpe, Pavages, univ. Genève, nov. 2011)

Ce sujet d'apparence ludique est en fait d'une grande importance tant en mathématiques qu'en chimie et cristallographie où les structures géométriques moléculaires et minérales peuvent être classifiées grâce aux propriétés d'invariance des pavages plans par les isométries usuelles de la géométrie affine, élémentaires ou composées : translations, symétries, symétries glissées et rotations.

Grâce aux transformations de plan, l'intérêt principal des pavages est qu'ils permettent de faire de la géométrie de façon à la fois esthétique, motivante et très mathématique.

Les pavages sont attirants par l'harmonie qui se dégage du caractère répétitif du motif de base. Paver le plan, c'est le recouvrir sans trou ni chevauchement.

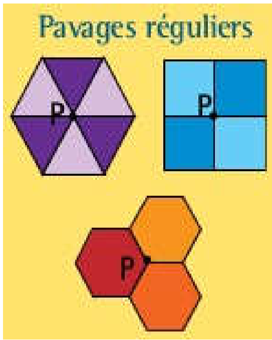
Paver le plan, c'est recouvrir entièrement le plan, sans trou, ni superposition, avec une forme de base appelée pavé de base, que l'on reproduit autant que l'on veut en lui faisant subir des transformations simples et répétées.

Un résultat fondamental est que : *tout parallélogramme pave le plan*. Ce premier résultat considéré comme admis est simple de prouver graphiquement que tout parallélogramme pave le plan : en effet, lorsqu'on effectue des copies successives de ce parallélogramme - uniquement par translation - on s'aperçoit rapidement que, du fait que le parallélogramme possède des côtés parallèles et égaux deux à deux, ses copies s'emboîtent parfaitement et peuvent paver le plan.
Il existe des pavages réguliers, où on ne retrouve qu'une seule forme de pavé, et des pavages irréguliers, où plusieurs formes interviennent.

III.1.1. Pavages réguliers[1]

Notre projet est de trouver quels polygones pavent le plan. Plus précisément, il s'agit de déterminer l'ensemble des **polygones convexes** pouvant paver le plan. Nous sommes tout d'abord partis du résultat fondamental que tout parallélogramme pave le plan afin de trouver premièrement quels sont les polygones convexes réguliers pavant le plan, puis nous nous sommes intéressés au cas des polygones convexes non irréguliers.

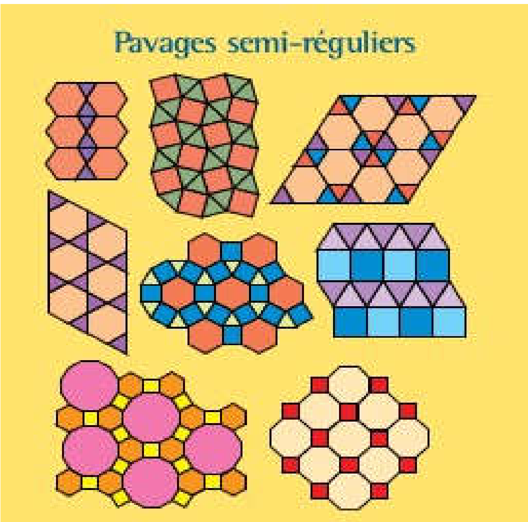
Les pavages réguliers sont ceux formés de polygones réguliers convexes identiques. En assemblant des polygones réguliers convexes en un sommet commun P, la somme de leurs angles en ce sommet doit être de 360°. Il n'y a que trois cas de pavages réguliers. En effet, les polygones permettant un recouvrement sans chevauchements ni vide sont les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones : une démonstration mathématique est donnée dans la suite.



1.2. Pavages semi-réguliers

(Groupe collège IREM, université de Nantes,2021)

Les pavages semi-réguliers sont ceux constitués d'au moins deux polygones réguliers convexes, il n'y a que huit cas possibles qui sont illustrés ci-dessous.



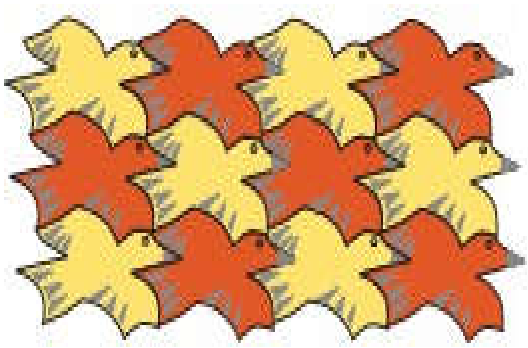
---
[11]André Ross, *Pavages,*Volume 5.1 - hiver-printemps 2010

III.2. Transformations géométriques dans la construction d'un pavage

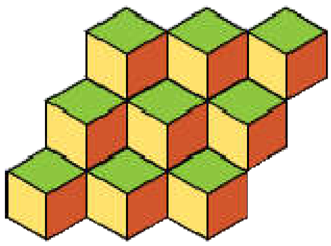
(www.chronomath.com,*une chronologie des MATHÉMATIQUES*)

La construction d'un pavage du plan peut faire intervenir trois types de transformations isométriques, car le motif de base ne peut être modifié. Ce sont la *translation*, la *rotation* et la *symétrie*.

Un pavage qui est réalisé en effectuant seulement des translations à partir d'un motif d'une cellule primitive est dit *pavage périodique*.



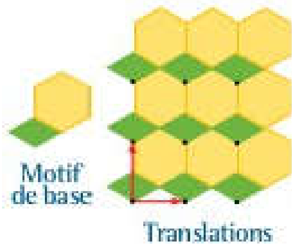
Les rotations constituent le deuxième type de transformation. Les angles de rotation sont nécessairement des diviseurs de 360° supérieurs ou égaux à 60°. Ce sont les angles de 60°, 90°, 120° et 180°.



Les symétries miroir et les symétries glissées constituent le troisième type de transformations géométriques que l'on peut utiliser. En utilisant ces trois isométries, on peut constituer une cellule primitive ou un pavé de base avec lequel on peut paver le plan en appliquant seulement deux translations. Les cellules primitives peuvent être des parallélogrammes, des rectangles, des carrés, des losanges ou des hexagones.

Les pavages semi-réguliers offrent plus de diversité dans le choix de la cellule primitive.

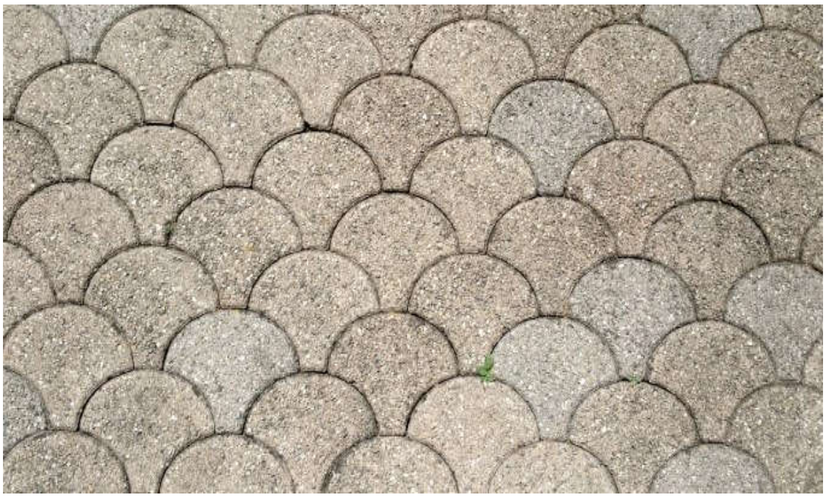
On peut, par exemple, constituer une cellule primitive avec un hexagone et un losange et reproduire celui-ci par translation.



La figure ci-dessous représente une portion de carrelage hexagonal d'une terrasse. Les carreaux (ou *pavés* ou *tuiles*) de ce carrelage ont une forme mathématique précise : ce sont ici des hexagones réguliers *identiques*. [2]

[2]*ChronoMath, une chronologie des MATHÉMATIQUES*

Pavage hexagonal



Pavage urbain souvent rencontré

Le fait que les *pavés* soient identiques se traduit mathématiquement par un qualificatif plus précis : ils sont *isométriques*. Chacun est l'image d'un autre par une isométrie du plan qui peut donc être :

- une translation;
- une rotation;
- une symétrie centrale (en fait une rotation d'angle 180°);
- une symétrie axiale;
- une symétrie glissée (composée d'une symétrie axiale et d'une translation);
- et tout composé de ces isométries.

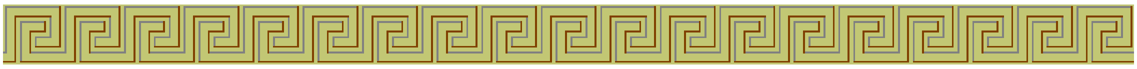
Cette condition d'isométrie nécessite de munir le plan d'une distance et d'une orientation : et là on est ainsi plongé dans le monde des *espaces euclidiens* avec le concept de *produit scalaire*.

III.3. Pavage d'espaces euclidiens

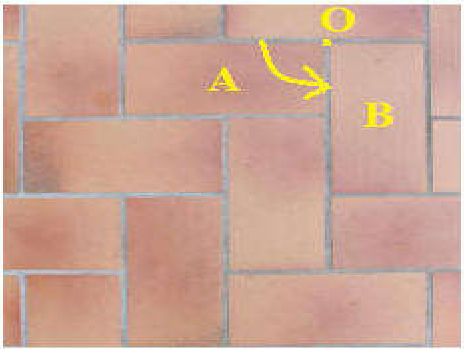
(Aziz El Kacimi, Mouvements euclidiens et pavages, univ. Valenciennes)

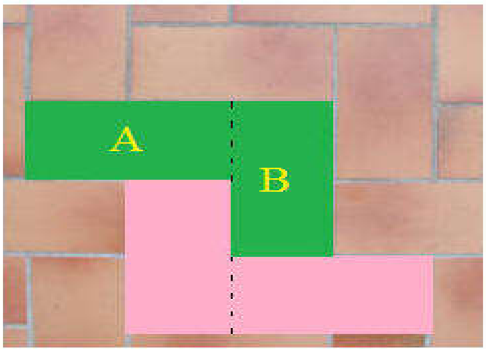
On appelle pavage d'un espace euclidien E, toute partition de E en pavés isométriques deux à deux. Lorsque E est de dimension n, un pavage est dit périodique s'il est globalement invariant par (au moins) n translations de vecteurs non colinéaires.

Cela sous-entend que le pavage n'est pas limité ! La comparaison à un carrelage a donc des limites... Dans le plan, si on se limite à un seul vecteur de translation, on obtiendrait concrètement une *frise* comme illustrée ci-dessous :



Voici un exemple de pavage périodique au moyen de pavés rectangulaires de longueur double de la largeur : Mathématiquement, vous constaterez que l'on passe du pavé A au pavé B par rotation de centre O, d'angle 90°.





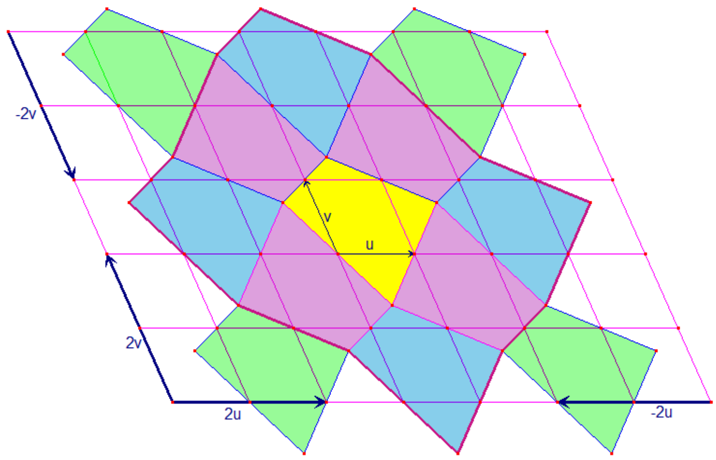
La réunion de A et B peut s'interpréter comme un pavé que l'on retrouve par translations successives, rotations ou symétries glissées.[3]

Théorème 1:

Le pavage périodique du plan est possible par tout quadrilatère, convexe ou non

En effet, en voici une preuve visuelle basée sur le théorème de Varignon selon lequel le quadrilatère joignant les milieux des côtés est un parallélogramme. Le pavé initial est en jaune. Nous avons schématisé les vecteurs de translation ±2u et ±2v permettant d'obtenir les pavés bleus. Les pavés roses sont obtenus par symétrie centrale par rapport aux milieux de côtés. Le bloc de contour marqué en gras se reproduit au moyen des deux translations (directes ou opposées).

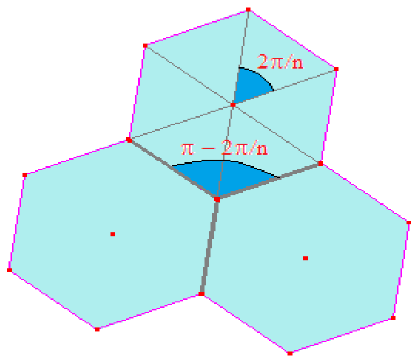
[3]*http://www.kangmath.org/pdf/paver.pdf : Kangourou, paver avec des carreaux de 4, 5 ou 6 côtés*



Théorème 2 :

Le pavage périodique du plan au moyen de polygones convexes n'est possible que pour des polygones dont le nombre de côtés n'excède pas 6 (triangles, quadrilatères, pentagones, hexagones).

Preuve :



Si un polygone régulier de **n** côtés est susceptible de paver le plan, notons p le nombre de polygones qui se côtoient en chaque sommet du pavage.

On doit avoir $2\pi = p(\pi - \frac{2\pi}{n})$, ce qui se simplifie en np - 2p - 2n = 0. Ajoutons alors 4 dans les deux membres : On a alors p(n - 2) - 2(n - 2) = 4, soit (n - 2)(p - 2) = 4

n et p étant entiers, on a guère le choix :

- n = 3, alors **p = 6** : pavage *triangulaire* (triangles équilatéraux), 6 se côtoient en formant un hexagone régulier.
- n = 4, alors **p = 4** : pavage *carré*.
- n = 5 : pas possible.
- n = 6, alors **p = 3** : pavage *hexagonal* et c'est pour n = 6 la valeur maximale.

Théorème 3:

Les seuls polygones réguliers convexes qui pavent le plan sont les triangles équilatéraux, les carrés et l'hexagones réguliers. **(***Nicolas Even et Alli*)

Preuve :

Soit un polygone régulier à n côtés et ϑ la valeur de l'angle entre deux côtés consécutifs. Divisons-le en n triangles isocèles identiques de sorte que chacun ait comme base l'un des côtés du polynôme.

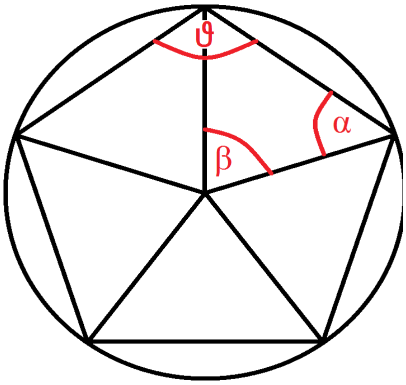


Figure : Illustration géométrique

Notons dans ces triangles isocèlesβ l'angle unique et α tel que $2\alpha = \vartheta$.

Nous avons alors$\beta = \frac{2\pi}{n}$

De plus comme les triangles sont isosceles, on doit avoir:

$$2\alpha + \beta = \pi$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + \frac{2\pi}{n} = \pi$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \pi - \frac{2\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi(n-2)}{2n}$$

Comme $2\alpha = \vartheta$, il vient que $\vartheta = \frac{\pi(n-2)}{n}$

Pour que P pave il doit exister un entier naturel k tel que $2\pi = k\vartheta$

On a dans ce cas $2\pi =$ □□

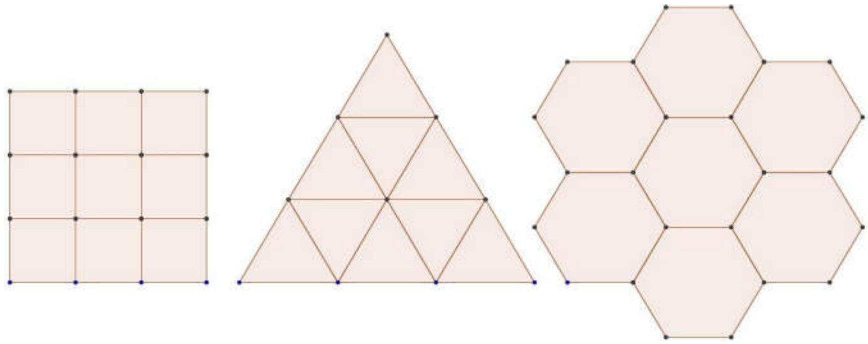
$$\Leftrightarrow 2□ = \frac{□□(□ - 2)}{□}$$

$$\Leftrightarrow 2□ = □(□ - 2)$$

$$\Leftrightarrow 2(□ - 2) + 4 = □(□ - 2)$$

$$\Leftrightarrow (□ - 2)(□ - 2) = 4$$

Autrement dit, (n-2) doit être diviseur de 4. Comme les seuls diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4, n peut donc valoir **3**, **4**ou**6**. *Par conséquent,* ***aucun autre*** *polygone convexe régulier ne peut paver le plan.*



Figures: pavages avec des carrés, des triangles équilatéraux et des hexagones réguliers.

III.4. Frises et Dallage

Non seulement la notion de répétition d'un motif de départ est importante, mais il faut également considérer l'espace occupée par ce dernier.

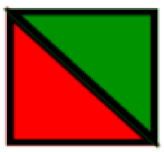
Un dallage est une surface recouverte de motifs sans espace libre et sans superposition de ceux-ci.

Une fois de plus, on peut utiliser la translation ou la réflexion pour construire un dallage.

1. ***Construction d'un dallage par réflexion***

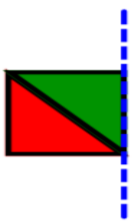
On peut obtenir un dallage en effectuant une réflexion d'un ou de plusieurs motifs.

1) Tracer le motif de base.

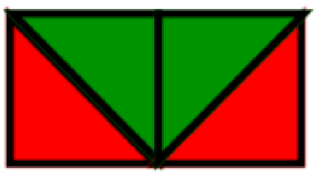


Motif de base

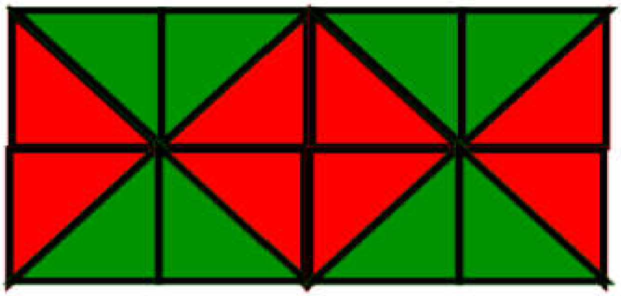
2) Tracer un premier axe de réflexion.



3) Effectuer la première réflexion.



4) Effectuer la réflexion aussi souvent que désiré.

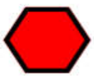


Fait à noter, on peut tracer les axes de réflexion où l'on veut. L'important est de s'assurer de couvrir toute la surface sans laisser d'espace visible entre chacun des motifs.

2. Construction d'un dallage par translation

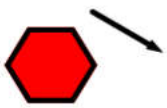
Pour effectuer un dallage par translation, on procède sensiblement de la même façon que pour la réflexion toujours en s'assurant qu'il n'y ait aucun espace vide entre chacune des reproductions.

1) Tracer le motif de base.

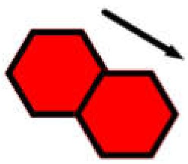


Motif de base

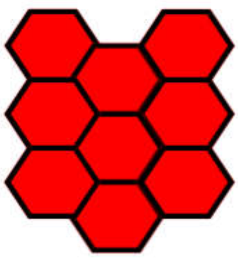
2) Tracer une première flèche de translation.



3) Tracer le résultat de la première translation.



4) Répéter les translations aussi souvent que désiré.



Fait à noter, l'orientation, le sens et la longueur de la flèche de translation va varier selon l'image que l'on veut obtenir. En fait, il faut simplement s'assurer qu'il n'y ait aucun espace libre entre chacun des motifs images puisqu'il s'agit d'une surface à couvrir entièrement.

CONCLUSION

Nous voici au terme de notre article, portant sur «*Des transformations du plan dans la construction des frises géométriques* » dont l'objectif principal était de développer des éléments d'une compréhension facile sur la nécessité des transformations géométriques dans la construction des frises mathématiques dont les applications sont innombrables. En effet, plusieurs tissus et matériaux présentent des images ou des motifs qui peuvent se répéter selon une logique préétablie. Dans le domaine mathématique, on décrit ces constructions comme étant des frises et des dallages ou des pavages. On peut faire des pavages sans trop en connaître la théorie, mais la beauté de ces dessins est indissociable des mathématiques sous-jacentes. Les outils mathématiques sur la transformation du plan qui interviennent dans des frises mathématiques sont entre autres les isométries et les homothéties dans le cas rare.

Les concepts mathématiques derrière les pavages sont principalement ceux d'isométrie et de groupe d'isométries. Il y a lieu de constater et de retenir l'existence de sept types de frises construites à partir des transformations du plan :

1) Frise construite à partir d'une translation ;
2) Frise construite à partir d'une réflexion verticale et d'une translation ;
3) Frise construite à partir d'une réflexion horizontale et d'une translation ;
4) Frise construite à partir d'une symétrie glissée et d'une translation ;
5) Frise construite à partir d'une rotation de 180 degrés et d'une translation ;
6) Frise construite à partir d'une réflexion verticale, d'une réflexion horizontale, d'une rotation de 180 degrés et d'une translation ;
7) Frise construite à partir d'une réflexion verticale, d'une symétrie glissée, d'une rotation de 180 degrés et d'une translation. Ainsi pouvons-nous conclure que, dans le but de les appliquer aux pavages, aux dallages et même aux carrelages, **l**es constructions de frises utilisent un motif qui se répètent suivant une translation, une rotation et dans le cas rare un agrandissement ou une homothétie.

BIBLIOGRAPHIE

A. OUVRAGES

1. André Ross, *Pavages,* hiver-printemps 2010
1. Aziz El Kacimi, *Mouvements euclidiens et pavages* (univ. Valenciennes)
2. Brigitte Sénéchal, *Groupes*, par - Éd. Hermann, Paris – 1979
3. DROUIN., *Équipe académique de mathématiques,* Bordeaux, novembre 2002
4. Groupe collège IREM pays de la loire, *des pavages aux transformations*, université de Nantes, juillet 2021
5. Nicolas Even, Gaby Portelli et Paul Prilleux, *Pavages du plan avec des polygones convexes*
6. Pierre de la Harpe, *Pavages*, univ. Genève, novembre. 2011)

B. WEBOGRAPHIE

- www.chronomath.com,*une chronologie des MATHÉMATIQUES* par Serge Mehl (2010)
- https://www2.unine.ch/files/content/sites/math/files/shared/documents/sem_math_soc/2012/pavages.pdf: *Pavages* par Pierre de la Harpe, univ. Genève, (nov. 2011)
- http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/elkacimi/pavages_expose.pdf
- http/bacamaths.net PDRH/Formation continue. PRF Kaolack janvier 95 COSTANTINI G.
- http://www.kangmath.org/pdf/paver.pdf : Kangourou, paver avec des carreaux de 4, 5 ou 6 côtés :