

Sur le théorème de la convergence simple et convergence compacte dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes

TUMUSIFU SENYONI Sadok*

Résumé

Dans ce travail, nous énonçons et démontrons le théorème de la convergence simple et de la convergence compacte dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes. Le théorème que nous proposons est considéré comme le résultat principal de notre recherche et généralise le théorème de la convergence simple et compacte dans les espaces fonctionnels uniformes. Il conduit à de nombreuses observations et applications nouvelles en topologie. Pour y parvenir, nous utilisons une méthode inductive, partant du particulier pour atteindre le général, ce qui nous permet de trouver la généralisation souhaitée.

Mots-clés : *Convergence simple, Compacité, Espaces fonctionnels, Quasi-uniforme.*

Abstract

In this work, we state and prove the simple convergence and compact convergence theorem in quasi-uniform functional spaces. The theorem we propose is considered the main result of our research and generalizes the simple and compact convergence theorem in uniform functional spaces. It leads to numerous new observations and applications in topology. To achieve this, we use an inductive method, starting from the particular to reach the general, which allows us to find the desired generalization.

Keywords: *Simple convergence, Compactness, Functional spaces, Quasi-uniform.*

I. Introduction

La convergence des suites de fonctions est un concept fondamental en analyse fonctionnelle, revêtant une importance particulière dans l'étude des propriétés des espaces de fonctions. Parmi les différentes notions de convergence, la convergence ponctuelle (ou simple) est définie comme suit :

* Enseignant – Chercheur, Assistant de Deuxième mandat à l'**Institut Supérieur Pédagogique – ISP – de Kichanga**, Département de Mathématiques Physique, R. D. Congo, E-mail : sadoktumusifu368@gmail.com, Téléphone : +243 896 350 652.

Soient X un espace topologique, Y un espace métrique avec la distance d , et F un ensemble de fonctions définies de X dans Y . Une suite de fonctions (f_n) dans F converge ponctuellement vers une fonction f dans F si, pour tout x dans X , la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini existe et est égale à $f(x)$. Formellement : Pour tout x dans X et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, la distance $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ voir (Assani, 1987). La convergence compacte est un raffinement de la convergence simple, qui prend en compte la compacité des sous-ensembles de X . Une suite de fonctions (f_n) converge de manière compacte vers f si, pour tout compact K de X , la suite restreinte $(f_n$ sur K) converge uniformément vers f sur K (Bourbaki, 2007).

Ces types de convergence sont bien connus et donnent lieu au théorème de la convergence simple et compacte pour les ensembles équicontinue dans les espaces fonctionnels uniformes. Plus précisément, supposons que $T(X, Y)$ est l'ensemble des fonctions définies de X vers Y . Soient X un espace topologique (ou uniforme), Y un espace uniforme, et H une partie équicontinue (ou uniformément équicontinue) de $T(X, Y)$. Alors, sur H , les structures uniformes de convergence compacte (ou précompacte), de convergence simple, et de convergence simple sur une partie dense D de X sont identiques selon (Bourbaki, 2007).

Le théorème de la convergence simple et compacte pour les ensembles équicontinue étant connu dans les espaces fonctionnels uniformes, et sachant que les espaces fonctionnels quasi-uniformes généralisent les espaces fonctionnels uniformes, il est naturel de se demander si ce théorème peut être généralisé dans le cadre quasi-uniforme. Nous posons l'hypothèse selon laquelle une telle généralisation existe et pourrait conduire à des applications intéressantes. Pour répondre à cette question, nous adoptons une méthode inductive permettant de généraliser les résultats connus. Cette étude vise à enrichir la compréhension des notions de convergence dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes.

La première section présente les notions préliminaires sur les espaces uniformes et quasi-uniformes. La deuxième section traite des différentes topologies définies sur les espaces fonctionnels (uniformes et quasi-uniformes), ainsi que de l'équicontinuité dans ces deux cadres. La troisième section, intitulée « Théorème de la convergence simple et compacte

dans le cadre quasi-uniforme », expose l'essentiel de notre contribution, en commençant par un rappel du théorème classique.

II. Préliminaires sur les espaces uniformes et quasi-uniformes

2.1 Définitions

1. Espace topologique

Un espace topologique est un couple (X, T) où X est un ensemble et T est une famille de parties de X qui satisfait aux propriétés suivantes :

- A. L'ensemble vide et X lui-même appartiennent à T , c'est-à-dire $\emptyset \in T$ et $X \in T$.
- B. L'intersection de deux éléments de T appartient à T , c'est-à-dire si U et V sont dans T , alors $U \cap V \in T$.
- C. L'union de toute famille d'éléments de T appartient à T , C'est-à-dire que si la famille (U_i) pour i dans I est un sous-ensemble de T , alors l'union de tous les U_i pour i dans I appartient à T . Les éléments de T sont appelés les ouverts de X (Bourbaki, 1966) et (Guedj).

2. Espace uniforme

Un espace uniforme est un couple (X, U) où X est un ensemble et U est une famille de parties de $X \times X$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

- A. La diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ appartient à U .
- B. Si $U \in U$, alors l'inverse $U^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in U\}$ appartient à U .
- C. L'intersection de deux éléments de U appartient à U , c'est-à-dire si $U, V \in U$ alors $U \cap V \in U$.
- D. Pour tout $U \in U$, il existe $V \in U$ tel que la composition $V \circ V \subseteq U$, où $V \circ V = \{(x, z) \mid \text{il existe } y \in X \text{ tel que } (x, y) \in V \text{ et } (y, z) \in V\}$.
- E. Si $U \in U$ et $U \subseteq V$, alors $V \in U$ voir (Bourbaki, 1966) et (Bourbaki, 2007) et (Doïtchinov, 1965). Les éléments de U sont appelés les entourages de X .

3. Espace quasi-uniforme

Un espace quasi-uniforme est un couple (X, U) où X est un ensemble et U est une famille de parties de $X \times X$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

- A. La diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ appartient à U .
- B. Si $U \in U$, alors $U^{-1} \in U$.
- C. L'intersection de deux éléments de U appartient à U .
- D. Pour tout $U \in U$, il existe $V \in U$ tel que $V \circ V \subseteq U$.
- E. Si $U \in U$ et $U \subseteq V$, alors $V \in U$ (Cordier, 1971) et (Iragi, 2023).

Un entourage d'un espace quasi-uniforme (X, U) est un élément de U . Ce sont des parties de $X \times X$ qui représentent les voisinages de la diagonale Δ .

La **composition d'entourages** est définie, pour $U, V \in U$, par : $U \circ V = \{(x, z) \mid \text{il existe } y \in X \text{ tel que } (x, y) \in U \text{ et } (y, z) \in V\}$ (Cordier, 1971).

a. Entourage et complété

i. Entourage d'un espace quasi uniforme

Un *entourage* d'un espace quasi uniforme $(X, \mathcal{U})$ est un élément de $\mathcal{U}$.

Les entourages sont des sous-ensembles de $X \times X$ qui représentent les voisinages de la diagonale Δ (voir Bourbaki, 1966).

Composition d'entourages

Si U et V appartiennent à $\mathcal{U}$, alors la composition $U \circ V$ est définie par : $U \circ V = \{(x, z) \mid \text{il existe } y \in X \text{ tel que } (x, y) \in U \text{ et } (y, z) \in V\}$ voir (Bourbaki, 1966).

ii. Complété d'un espace quasi uniforme

Un *complété* d'un espace quasi uniforme $(X, \mathcal{U})$ est un espace quasi uniforme $(Y, \mathcal{V})$ tel que :

- 1) X est inclus dans Y ;
- 2) $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap (X \times X)$;

3) Y est complet pour la topologie associée à $\mathcal{V}$ voir (Pietroski, 1962).

b. Complété d'un espace quasi-uniforme : Le complété d'un espace quasi-uniforme (X, U) est un espace quasi-uniforme (Y, V) tel que :

- i. $X \subseteq Y$
- ii. $U = V \cap (X \times X)$
- iii. Y est complet pour la topologie associée à V (Predoi, 1979)

III. Espaces Fonctionnels et Topologie de Convergence

Dans ce sous-chapitre, nous étudions les espaces fonctionnels $T(X, Y)$, formés de fonctions continues entre espaces topologiques, ou quasi-uniformément continues entre espaces quasi-uniformes. La topologie de convergence y joue un rôle central

3.1 Espaces fonctionnels $T(X, Y)$

Soient X et Y deux espaces topologiques. L'espace fonctionnel $T(X, Y)$ regroupe les fonctions continues de X dans Y . On le munit généralement de la topologie de la convergence simple (ou ponctuelle), voire de la convergence uniforme sur certaines parties de X .

(1) Topologie de la convergence simple : Cette topologie est définie ainsi : un ensemble U de $T(X, Y)$ est ouvert si, pour toute fonction f appartenant à U , il existe des points $x_1, \dots, x_n$ dans X et des voisinages $V_1, \dots, V_n$ de $f(x_1), \dots, f(x_n)$ tels que l'ensemble des fonctions g pour lesquelles $g(x_i)$ appartient à V_i pour tout i est inclus dans U voir Bourbaki (2007), Buchwalter (2006), Grothendieck (1952).

(2) Fonctions quasi-uniformément continues Lorsque X et Y sont quasi-uniformes, on considère les fonctions quasi-uniformément continues :

Définition : Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est quasi-uniformément continue si, pour tout entourage V de Y , il existe un entourage U de X tel que pour tous x et x' dans X , si (x, x') appartient à U alors $(f(x), f(x'))$ appartient à V . L'ensemble de ces fonctions est noté $T_q(X, Y)$ voir Cordier (1971), Simon (2019).

(3) Topologie sur $T_q(X, Y)$: On définit une topologie sur $T_q(X, Y)$ via la convergence uniforme sur les entourages de X . Un ensemble U de $T_q(X, Y)$ est ouvert si, pour toute fonction f dans U et tout entourage V de Y , il existe un entourage U_0 de X et un voisinage W de f tel que pour toute fonction g dans W , si (x, x') appartient à U_0 alors $(g(x), g(x'))$ appartient à V . Cette topologie généralise la continuité uniforme au cadre quasi-uniforme. Référence : Cordier (1971).

3.2 Topologie de convergence

La topologie de convergence étudie les espaces fonctionnels à travers différents types de convergence. On distingue la convergence simple, la convergence compacte et la convergence sur une partie dense.

1) Convergence simple : La convergence simple (ou ponctuelle) concerne les suites de fonctions dont les valeurs convergent point par point.

Définition : Soit (f_n) une suite de fonctions de X vers un espace métrique (Y, d) . On dit que f_n converge simplement vers f si pour tout x dans X , $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ voir Hassan (2011), Assani (1987).

Exemple : Soit $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$. Alors f_n converge simplement vers la fonction f définie par :

- $f(x) = 0$ si x appartient à $[0, 1)$
- $f(1) = 1$

Mais la convergence n'est pas uniforme : le maximum de $|f_n(x) - f(x)|$ pour x dans $[0, 1]$ est toujours égal à 1 pour tout n .

Définition (topologie de la convergence simple) : Soit $F(X, Y)$ l'espace des fonctions. Pour chaque x dans X et chaque $\varepsilon > 0$, on définit un voisinage $V_{\{x, \varepsilon\}}$ de la façon suivante : $V_{\{x, \varepsilon\}} = \{f \text{ dans } F(X, Y) \mid \text{la distance } d(f(x), 0) < \varepsilon\}$, la topologie engendrée par ces ensembles est la topologie de la convergence simple voir Bourbaki (1966).

Exemple : Avec $X = \{1, 2\}$, $Y = \mathbb{R}$, et la fonction nulle f_0 , si $\varepsilon = 1$, un voisinage de f_0 est : $V = \{f \text{ dans } F(X, Y) \mid |f(1)| < 1 \text{ et } |f(2)| < 1\}$. Cela illustre que la convergence simple correspond à une convergence point par point.

2) Convergence compacte : La convergence compacte renforce la convergence simple en exigeant une convergence uniforme sur les compacts.

Définition : Une suite de fonctions (f_n) converge d'une façon compacte vers une fonction f si, pour tout compact K inclus dans X , la suite restreinte $f_n|_K$ converge uniformément vers $f|_K$ (Bourbaki, 1966).

Exemple : Soit $f_n(x) = x / (1 + n x^2)$. Sur tout compact K inclus dans $\mathbb{R}$, on a : $|f_n(x)| \leq C / (1 + n x^2) \rightarrow 0$, ce qui implique que f_n converge uniformément vers 0 sur K . Donc f_n converge d'une façon compacte vers 0.

- **Topologie de la convergence compacte :** Un ensemble U de $F(X, Y)$ est ouvert pour cette topologie si, pour toute fonction f dans U , il existe un compact K inclus dans X et un réel $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\{g \mid \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Exemple : Pour $X = \mathbb{R}$ et $f_0(x) = 0$, un voisinage de f_0 peut être :

$$V = \{f \mid \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| < \varepsilon\}.$$

Cela montre que cette topologie prend en compte le comportement des fonctions sur les compacts. La convergence sur une partie dense est utile lorsque l'on connaît le comportement des fonctions uniquement sur un sous-ensemble dense D de X .

Définition : Soit D inclus dans X dense. Une suite de fonctions (f_n) converge vers f sur D si, pour tout point d de D , $f_n(d) \rightarrow f(d)$ (Bourbaki, 1966).

Exemple : Soit $X = \mathbb{R}$, $D = \mathbb{Q}$, et $f_n(x) = (1/n)\sin nx$. Pour tout x rationnel, $|f_n(x)| \leq 1/n \rightarrow 0$. Ainsi, f_n converge vers 0 sur $\mathbb{Q}$, mais cela ne garantit pas la convergence sur $\mathbb{R}$.

3) Topologie de la convergence sur une partie dense :

La topologie associée est engendrée par les voisinages de la forme :

$V\{d_1, \dots, d_k; \varepsilon\} = \{g \in F(X, Y) \mid \text{pour tout } i, d(g(d_i), f(d_i)) < \varepsilon\},$
 où $d \in D$ et $\varepsilon > 0$ (Bourbaki, 1966) et (Bourbaki, 2007).

Exemple : Avec $X = [0,1]$, $D = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, et $f_0(x) = 0$, un voisinage de f_0 est : $V = \{f \in F([0,1], \mathbb{R}) \mid |f(q_i)| < \varepsilon \text{ pour } i = 1, \dots, k\}.$

Cela illustre une topologie basée sur le comportement des fonctions en des points rationnels seulement.

4) Construction des quasi-uniformités de convergence

Les **quasi-uniformités** généralisent les uniformités pour mieux modéliser différentes formes de convergence dans les espaces fonctionnels. Elles reposent sur des systèmes de voisinages adaptés au type de convergence (Iragi, 2023).

A. **Convergence simple :** La quasi-uniformité de convergence simple est définie par les ensembles : $W_{\{x, \varepsilon\}} = \{(f, g) \in F(X, Y)^2 \mid d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}$ pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$. Cette quasi-uniformité induit la topologie de la convergence simple (point par point) (Iragi, 2023).

B. **Convergence compacte et convergence sur une partie dense :**

- Pour la convergence compacte : $W_{\{K, \varepsilon\}} = \{(f, g) \in F(X, Y)^2 \mid \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}$, avec K un compact de X . Cela modélise la convergence uniforme sur les compacts.
- Pour une partie dense D de X : $W_{\{x, \varepsilon\}}^D = \{(f, g) \in F(X, Y)^2 \mid d(f(x), g(x)) < \varepsilon\}$, avec $x \in D$. Ces voisinages forment une quasi-uniformité adaptée à la convergence sur D , généralement plus faible que celle sur X voir (Iragi, 2023).

3.3 Équicontinuité dans les espaces fonctionnels

On introduit d'abord l'équicontinuité classique, puis l'équicontinuité quasi-uniforme, qui englobe les notions d'équicontinuité à gauche et à droite. Ces notions sont cruciales pour le théorème principal.

3.3.1 Équicontinuité classique

Définition : Soient X et Y des espaces uniformes. Une famille de fonctions $F \subseteq C(X, Y)$ est dite **équicontinue** si, pour tout $x \in X$ et pour tout entourage V de Y , il existe un entourage U de X tel que pour toute fonction $f \in F : (x, x') \in U \Rightarrow (f(x), f(x')) \in V$. Cette définition met en avant l'uniformité de la continuité des fonctions de la famille F sur X . Elle implique que pour chaque fonction f dans F , il existe un voisinage U_x de x tel que $f(U_x)$ soit inclus dans $V_x f(x)$, mais la taille et la forme de U_x peuvent dépendre de x mais pas de f , ce qui explique le caractère uniforme (Waltier, 1900).

Proposition (Continuité uniforme sur les compacts) : D'après Hassan (2011), si F est équicontinue et K est un sous-ensemble compact de X , alors F est uniformément équicontinue sur K . Cela signifie que pour tout entourage V de Y , il existe un entourage U de X tel que pour toute fonction f dans F , si (x, x') appartient à U et à $K \times K$, alors $(f(x), f(x'))$ appartient à V (Buchwalter, 2006).

Proposition (Théorème d'Arzela-Ascoli) : Selon Guedj, si X est un espace métrique compact et Y un espace métrique complet, le théorème d'Arzela-Ascoli affirme qu'une partie F de l'ensemble des fonctions continues de X dans Y est compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si F est fermée, équicontinue et uniformément bornée. Autrement dit, il existe une boule B de Y telle que pour tout x dans X et toute fonction f dans F , $f(x)$ appartienne à B (Bourbaki, 2007).

Proposition (Implications sur la convergence), D'après (Hassan, 2011), l'équicontinuité a des conséquences importantes sur la convergence des suites de fonctions. Par exemple, si (f_n) est une suite de fonctions équicontinue qui converge simplement vers une fonction f , alors sous certaines conditions, cette convergence est uniforme (Bourbaki, 2007).

Exemple : Considérons la suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ définie par $f_n(x) = x^n$. Cette suite est équicontinue sur $[0, a]$ pour tout $a < 1$, mais pas sur $[0, 1]$, car pour $x = 1$, il n'existe pas de voisinage de 1 où toutes les fonctions f_n soient uniformément continues.

3.3.2 Équicontinuité quasi-uniforme : Une famille de fonctions F de X dans Y est dite équicontinue quasi-uniformément si, pour tout entourage V de Y , il existe un voisinage U de chaque point x dans X tel que pour toute fonction f dans F et tout y dans U , $(f(x), f(y))$ appartienne à V , et cela pour tous les points x de X voir (Buchwalter, 2006).

Exemple : Soit $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$ avec la distance usuelle, et considérons la famille $F = \{f_n(x) = \sin nx \text{ pour } n \text{ dans } \mathbb{N}\}$. Cette famille n'est pas équicontinue quasi-uniformément, car pour tout x dans $\mathbb{R}$, les fonctions f_n oscillent de plus en plus rapidement lorsque n augmente. Il n'existe donc pas de voisinage U de x qui convienne à toutes les fonctions f_n . À l'inverse, la famille $F = \{f_n(x) = x/n \text{ pour } n \text{ dans } \mathbb{N}\}$ est équicontinue quasi-uniformément. Pour tout $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir un voisinage U de x assez petit pour que $|f_n(x) - f_n(y)| = |x - y| / n < \varepsilon$ pour tout n et tout y dans U . Ici, le voisinage U ne dépend pas de n , ce qui satisfait l'équicontinuité quasi-uniforme. Cette notion est plus forte que l'équicontinuité simple, car elle exige que le même voisinage U convienne pour tous les points x de X .

Équicontinuité à gauche, à droite et symétrique : Soit X un espace topologique ordonné et Y un espace quasi-uniforme.

1. Une famille de fonctions F est dite équicontinue à gauche si, pour tout x dans X et tout entourage V de Y , il existe un voisinage U de x dans X tel que pour toute fonction f dans F et tout y dans U avec $y \leq x$, $(f(y), f(x))$ appartient à V .
2. Une famille de fonctions F est dite équicontinue à droite si, pour tout x dans X et tout entourage V de Y , il existe un voisinage U de x dans X tel que pour toute fonction f dans F et tout y dans U avec $x \leq y$, $(f(x), f(y))$ appartient à V .
3. Une famille de fonctions F est dite équicontinue symétriquement si elle est à la fois équicontinue à gauche et à droite.

Exemple : Soit $X = \mathbb{R}$ muni de son ordre naturel, $Y = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, et considérons la famille de fonctions $F = \{f_n(x) = \sqrt{x + 1/n}\}$ pour $n \in \mathbb{N}$, définie sur $X_+ = [0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, on peut choisir un voisinage $U = (x - \delta, x]$ avec $\delta > 0$ assez petit, tel que pour tout $y \in U$: $|f_n(y) - f_n(x)| = |\sqrt{y + 1/n} - \sqrt{x + 1/n}| \rightarrow 0$ uniformément en n . Donc, la famille F est équicontinue à gauche sur X_+ . Cependant, elle n'est pas

nécessairement équicontinue à droite en $x = 0$, car la fonction racine devient plus sensible près de zéro.

Conséquence sur la régularité de H : D'après (Buchwalter, 1969) : soit H un sous-espace de Y^X équipé de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X . Si H est équicontinue, alors H est un espace régulier.

Preuve : Un espace topologique est régulier si pour tout point x et tout voisinage U de x , il existe un voisinage V de x tel que la fermeture de V soit contenue dans U . L'idée de la preuve est que l'équicontinuité permet de contrôler la variation des fonctions de H sur des voisinages arbitrairement petits, ce qui garantit que les adhérences des ensembles de niveau des fonctions continues de H restent bien séparées. Soit $x_0 \in X$ et U un voisinage de x_0 . On choisit un compact K contenant x_0 et inclus dans U . Soit V un entourage symétrique de Y . Puisque H est équicontinue, il existe un voisinage W de x_0 tel que la fermeture de W soit incluse dans K et que pour tout $f \in H$, pour tout $x, y \in W$:

$(f(x), f(y)) \in V$. Alors la fermeture de W est incluse dans U : pour $x \in \text{clôture}(W)$ et tout voisinage O de x , il existe $y \in W \cap O$. L'équicontinuité de H sur K permet de trouver un entourage V' de Y tel que pour tout $f \in H$, si $(f(z), f(z')) \in V'$ pour $z, z' \in K$, alors $(f(z), f(x)) \in V$. Comme les fonctions de H peuvent être continues, l'ensemble $\{(f(y), f(x)) : f \in H\}$ est relativement compact dans Y^2 , donc il existe un entourage V'' tel que $V'' \circ V'' \subseteq V'$. On en déduit que $(f(y), f(x)) \in V$ pour tout $f \in H$, donc $x \in U$.

Ainsi, $\text{clôture}(W) \subseteq U$, ce qui montre la régularité de H .

IV. Théorème de la convergence simple et compacte dans le cadre quasi-uniforme

4.1 Énoncé du théorème dans le cadre uniforme

Théorème (Bourbaki, 2007) : Soient X un espace topologique (respectivement. un espace uniforme) et Y un espace uniforme. Soit H une partie équicontinue (respectivement. uniformément équicontinue) de l'ensemble des fonctions de X dans Y , noté $T(X, Y)$. Alors, sur H , les structures uniformes suivantes sont identiques :

1. la structure de convergence compacte (respectivement. précompacte),

2. la structure de convergence simple,
3. la structure de convergence simple sur une partie dense D de X .

Preuve : Il suffit de montrer que, sur H , la structure de convergence simple sur une partie dense est plus fine que la structure de convergence compacte (respectivement. précompacte). Autrement dit, il faut prouver que, étant donné : un entourage V de Y et une partie compacte (respectivement. précompacte) A de X , il existe : un entourage W de Y , une partie finie F contenue dans D (où D est dense dans X), tels que : si pour deux fonctions u et v dans H , on a $(u(x), v(x)) \in W$ pour tout $x \in F$, alors on obtient $(u(x), v(x)) \in V$ pour tout $x \in A$.

Cas 1 : A est compact et H est équicontinue : Choisissons un entourage symétrique W de Y tel que W^5 soit contenu dans V (c'est-à-dire $W = W^{-1}$ et $W^5 \subseteq V$).

D'après l'équicontinuité de H , pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U(x)$ de x tel que, pour tout $x' \in U(x)$ et tout $u \in H$: $(u(x), u(x')) \in W$. Le compact A , peut être recouvert par un nombre fini de ces voisinages : il existe $U_1, \dots, U_n$ tels que $A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n$, et pour tous $x', x'' \in U_i$ et tout $u \in H$: $(u(x'), u(x'')) \in W^2$.

Comme D est dense dans X , on peut choisir, pour chaque U_i , un point $a_i \in D \cap U_i$. Posons $F = \{a_1, \dots, a_n\}$. Si pour deux fonctions $u, v \in H$ on a : $(u(a_i), v(a_i)) \in W$ pour tout $a_i \in F$, alors pour tout $x \in A$, il existe i tel que x et a_i appartiennent à U_i , et donc : $(u(x), u(a_i)) \in W^2$, $(u(a_i), v(a_i)) \in W$, $(v(a_i), v(x)) \in W^2$. Par composition, on obtient : $(u(x), v(x)) \in W^5 \subseteq V$.

Cas 2 : A est précompact et H est uniformément équicontinue : On considère les complétés uniformes $(\hat{X}, i)$ et $(\hat{Y}, j)$ de X et Y respectivement. L'image $i(A)$ de A dans $\hat{X}$ est compacte, et $i(D)$ est dense dans $\hat{X}$. Comme les entourages de Y sont les images réciproques par $j \times j$ des entourages de $\hat{Y}$, le raisonnement du cas précédent s'applique en remplaçant :

- X par $\hat{X}$,
- Y par $\hat{Y}$,
- H par son prolongement à $\hat{X}$,

- D par $i(D)$. Ainsi, la conclusion du théorème s'applique également dans le cas précompact.

Corolaire : Sous les hypothèses du théorème précédent, l'adhérence de H dans $T(X, Y)$ pour la topologie de convergence simple est identique à son adhérence pour la topologie de convergence compacte (respectivement. précompacte).

Preuve : D'après le théorème, les deux topologies coïncident sur H . Or, l'adhérence d'un ensemble équicontinue (respectivement. uniformément équicontinue) est elle-même équicontinue (respectivement. uniformément équicontinue). Par conséquent, l'adhérence de H est contenue dans $T(X, Y)$ et satisfait encore les hypothèses du théorème. Il en résulte que les deux topologies de convergence (simple et compacte/précompacte) coïncident également sur l'adhérence de H .

4.2 Enoncé du théorème dans le cadre des espaces quasi-uniforme

Ici, nous formulons et démontrons le théorème de la convergence simple et compacte pour les ensembles équicontinue dans le cadre des espaces fonctionnels quasi-uniformes et cette partie constitue notre contribution principale dans ce travail ajouté la notion d'équicontinuité à gauche et à droite évoqué précédemment.

Théorème (Généralisation quasi-uniforme) : Soient X un espace topologique (ou quasi-uniforme), Y un espace quasi-uniforme, et H une partie de $T(X, Y)$ constituée de fonctions continues (ou quasi-uniformément continues). On suppose que H est quasi-uniformément équicontinue (ou équicontinue pour la quasi-uniformité considérée, par exemple à gauche). Alors, sur H , les trois quasi-uniformités suivantes coïncident :

1. la quasi-uniformité de la convergence simple,
2. la quasi-uniformité de la convergence sur les parties compactes (ou précompactes) de X ,
3. la quasi-uniformité de la convergence simple sur une partie dense D de X .

Preuve : Comme dans le cas uniforme, il suffit de montrer que, sur H , la quasi-uniformité de la convergence simple sur une partie dense est plus fine que la quasi-uniformité de la convergence compacte (ou précompacte).

Soient : V , un entourage de Y (dans la quasi-uniformité à gauche), et A , une partie compacte (ou précompacte) de X , et enfin D , une partie dense de X . Nous cherchons un entourage W de Y et un ensemble fini F contenu dans D tels que : Si pour deux fonctions u et v dans H , on a $(u(x), v(x)) \in W$ pour tout x appartenant à F , alors $(u(x), v(x)) \in V$ pour tout x appartenant à A . Autrement dit, la proximité des fonctions sur un petit nombre de points denses (dans F) implique leur proximité uniforme sur toute la partie compacte (ou précompacte) A .

Cas 1 : A est compact et H est équicontinue (pour une quasi-uniformité à gauche) Comme V est un entourage de Y , on choisit un entourage W de Y tel que la composition de W avec elle-même cinq fois soit contenue dans V , c'est-à-dire :

$W \circ W \circ W \circ W \circ W \subseteq V$. (On note que W n'a pas besoin d'être symétrique, car nous travaillons dans le cadre quasi-uniforme à gauche.), par hypothèse d'équicontinuité, pour chaque point x de A , il existe un voisinage $U(x)$ de x tel que, pour tout x' dans $U(x)$ et tout u dans H , on ait : $(u(x), u(x')) \in W$. Le compact A peut donc être recouvert par un nombre fini de ces voisinages. Il existe donc $U_1, U_2, \dots, U_n$ tels que : $A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$, et pour tout u dans H et tous x', x'' appartenant au même U_i , on a : $(u(x'), u(x'')) \in W^2$. Puisque D est dense dans X , on peut choisir, dans chaque U_i , un point a_i appartenant à $D \cap U_i$. On pose alors $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Supposons maintenant que, pour u et v appartenant à H , on ait : $(u(a_i), v(a_i)) \in W$ pour tout a_i de F . Prenons un point x de A . Il existe alors un indice i tel que x et a_i appartiennent au même U_i . On a alors successivement :

- $(u(x), u(a_i)) \in W^2$
- $(u(a_i), v(a_i)) \in W$
- $(v(a_i), v(x)) \in W^2$

En composant ces relations (ce qui est permis dans le cadre quasi-uniforme à gauche), on obtient : $(u(x), v(x)) \in W^5 \subseteq V$. C'est ce qu'il fallait démontrer dans le cas compact.

Cas 2 : A est précompact et H est uniformément équicontinue, Considérons les complétés quasi-uniformes $(\hat{X}, i)$ et $(\hat{Y}, j)$ de X et Y .

On a alors :

- la fermeture $i(A)$ est compacte dans $\hat{X}$,
- $i(D)$ est dense dans $\hat{X}$,
- les entourages de Y sont les images réciproques, via $j \times j$, des entourages de $\hat{Y}$.

On applique alors le raisonnement du cas compact dans les complétés $\hat{X}$ et $\hat{Y}$: le prolongement $\hat{H}$ de H reste équicontinue, ce qui permet de conclure de la même manière. Ainsi, la quasi-uniformité de la convergence simple sur une partie dense est plus fine que celle de la convergence compacte (ou précompacte).

Comme l'inclusion inverse est toujours vraie, on obtient l'égalité des trois quasi-uniformités sur H . CQFD

Corollaire (Généralisation quasi-uniforme) : Soit $F(X, Y)$ l'ensemble de toutes les applications (ou fonctions) de X dans un espace quasi-uniforme Y . On munit cet ensemble d'une topologie de convergence induite par une quasi-uniformité (par exemple, la convergence simple quasi-uniforme ou la convergence compacte quasi-uniforme).

Soit H une partie de $F(X, Y)$ qui est équicontinue à gauche (ou à droite, ou symétriquement) relativement à la quasi-uniformité considérée.

Alors, l'adhérence de H (c'est-à-dire l'ensemble des limites de suites ou de filets de fonctions de H) dans la topologie de la convergence simple est la même que son adhérence dans la topologie de la convergence compacte (ou pré compacte) associée à la même quasi-uniformité. Autrement dit : L'adhérence de H pour la topologie simple = l'adhérence de H pour la topologie compacte.

Preuve: Sous l'hypothèse d'équicontinuité (à gauche, à droite ou symétrique), le théorème de compatibilité des topologies de convergence dans les espaces quasi-uniformes garantit que les topologies de la convergence simple et de la convergence compacte coïncide sur H . De plus, l'équicontinuité est stable par passage à la limite dans le cadre quasi-uniforme : si H est équicontinue, alors son adhérence l'est aussi.

C'est une version du théorème d'Arzela–Ascoli adaptée au contexte des quasi-uniformités. Ainsi, les deux topologies (simple et compacte) coïncident également sur l'adhérence de H , ce qui montre l'égalité annoncée : L'adhérence simple de H est égale à l'adhérence compacte de H .

Commentaires et précisions

1. Dans les espaces quasi-uniformes, les entourages ne sont généralement pas symétriques.
Il faut donc distinguer l'équicontinuité à gauche, à droite, ou symétrique.
On dit que H est quasi-uniformément équicontinue si, pour tout entourage V de Y , il existe un entourage U de X tel que, pour tout f appartenant à H et pour tout couple (x, x') appartenant à U , on ait $(f(x), f(x'))$ appartenant à V .
Autrement dit, les fonctions de H envoient les points proches de X (selon U) sur des points proches dans Y (selon V), de manière uniforme sur H .
2. La quasi-uniformité de la convergence simple est engendrée par des ensembles de la forme : $W_{\{x, V\}} = \{(f, g) \mid (f(x), g(x)) \text{ est dans } V\}$ où x est un point de X et V est un entourage de Y . Cela signifie que deux fonctions f et g sont proches (pour cette quasi-uniformité) si leurs valeurs en x sont proches dans Y .
3. La quasi-uniformité de la convergence compacte est définie par des ensembles de la forme : $W\{K, V\} = \{(f, g) \mid \text{pour tout } x \text{ dans } K, (f(x), g(x)) \text{ est dans } V\}$ où K est un sous-ensemble compact (ou précompact) de X et V est un entourage de Y . Autrement dit, deux fonctions f et g sont proches si elles sont proches sur tout l'ensemble compact K .
4. La convergence sur une partie dense D de X se définit de façon analogue à la convergence simple, mais uniquement en considérant les points appartenant à D .

En résumé, le corollaire établit que, pour des familles de fonctions équicontinue dans le cadre quasi-uniforme, les notions de convergence simple et de convergence compacte mènent à la même adhérence — ce qui généralise un résultat classique du cas topologique uniforme au cadre plus fin des quasi-uniformités.

VI. Discussion des résultats

Généralisation du théorème classique : Le théorème que nous présentons généralise un résultat classique de la théorie des espaces fonctionnels uniformes. Dans ce cadre, il est connu que, pour une famille de fonctions uniformément équicontinue entre espaces uniformes, les notions de convergence simple, de convergence compacte et de convergence sur une partie dense coïncident. Notre résultat étend ce cadre en remplaçant les structures uniformes par des quasi-uniformités, ce qui permet de traiter des comportements asymétriques.

Relaxation des hypothèses : Contrairement aux uniformités, les quasi-uniformités n'imposent pas la symétrie des entourages. Cette généralisation permet d'analyser des situations où la direction joue un rôle, comme dans les distances asymétriques, les topologies de convergence faibles orientées, ou certains espaces de Banach asymétriques. Ainsi, notre cadre est plus général tout en conservant la conclusion forte : la coïncidence des différentes notions de convergence sous l'hypothèse d'équicontinuité.

Comparaison avec d'autres résultats : Peu de travaux abordent la convergence dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes. Notre théorème constitue un analogue quasi-uniforme du théorème d'Arzela-Ascoli, en mettant en évidence une forme d'équivalence structurelle des quasi-uniformités fonctionnelles sous hypothèse d'équicontinuité. Il complète les études existantes sur la convergence simple et compacte pour les ensembles équicontinue dans les espaces fonctionnels uniformes, qui sont souvent considérées sans recours aux structures quasi-uniformes.

Conclusion et perspectives d'avenir

L'analyse fonctionnelle, notamment dans le cadre des espaces fonctionnels quasi-uniformes, comporte plusieurs notions de convergence, en particulier la convergence simple et la convergence compacte. Les espaces fonctionnels quasi-uniformes généralisent les espaces fonctionnels uniformes, et le théorème de la convergence simple et compacte pour les ensembles équicontinue est bien connu dans le cadre uniforme.

Dans ce contexte, notre travail s'est interrogé sur la possibilité de généraliser ce théorème aux espaces fonctionnels quasi-uniformes. Pour y parvenir, nous avons utilisé une

méthode inductive et un travail documentaire approfondi, nous permettant de consulter de nombreux ouvrages proches de notre sujet et d'adapter les techniques connues à ce nouveau cadre. Cette approche ouvre des perspectives pour l'étude des convergences dans des espaces plus généraux et asymétriques.

Le théorème de la convergence simple et compacte pour les ensembles équicontinue dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes peut être énoncé de la manière suivante.

On considère X un espace topologique (ou quasi-uniforme), Y un espace quasi-uniforme, et H une partie de l'ensemble des fonctions continues de X dans Y (ou quasi-uniformément continues). On suppose que H est quasi-uniformément équicontinue (ou équicontinue pour la quasi-uniformité considérée, par exemple à gauche). Alors, sur H , les structures quasi-uniformes suivantes coïncident :

- la quasi-uniformité de la convergence simple ;
- la quasi-uniformité de la convergence sur les parties compactes (ou précompactes) de X ;
- la quasi-uniformité de la convergence simple sur une partie dense D de X .

Dans nos recherches, nous nous sommes limités à la généralisation et à la démonstration du théorème de la convergence simple et compacte pour les ensembles équicontinue dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes, comme présenté dans sa forme abrégée ci-dessus.

Bien que notre travail ait permis d'établir l'énoncé et la démonstration de ce théorème, plusieurs pistes s'ouvrent pour des travaux futurs. Il serait pertinent d'examiner si ce théorème peut être généralisé de manière plus complète aux ensembles équicontinue dans les espaces fonctionnels quasi-uniformes.

Références bibliographiques

Assani, I., *Sur la convergence ponctuelle de quelques suites d'opérateurs*, Canadian Mathematical Bulletin, Vol. 30, No. 2 (1987), pp. 134–141, Cambridge University Press.

Bourbaki, N., *Éléments de mathématique. Topologie générale*, Chapitres 1 à 4, Hermann, 1966.

Bourbaki, N., *Topologie Générale: Chapitres 5 à 10*, Springer, 2007, pp. 245–308.

Buchwalter, H., *Fonctions continues et mesures sur un espace complètement régulier*, Springer, 2006, pp. 183–202.

Buchwalter, H., *Parties bornées d'un espace topologique complètement régulier*, Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, Vol. 9, No. 2 (1969), pp. 1–15.

Cordier, J.-M., *Espaces fonctionnels quasi-uniformes*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, Vol. 12, No. 2 (1971), pp. 113–136.

Doitchinov, D., *Une généralisation des espaces topologiques et des espaces uniformes*, Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, Vol. 5, No. 2 (1965), pp.

Grothendieck, A., *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux*, American Journal of Mathematics (1952), pp. 168–186, JSTOR.

Guedj, V., *Analyse Fonctionnelle*.

Hassan, N. E. H., *Topologie générale et espaces normés*, Vol. 110, Dunod, 2011.

Iragi, M., Holgate, D., *Quasi-uniform structures and functors*, arXiv preprint arXiv:2302.02757, 2023

Pietroski, G., *Quasi-uniform spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 103 (1962), pp. 206–227.

Predoi, M., *Sur la convergence quasi-uniforme*, Periodica Mathematica Hungarica, Vol. 10, No. 1 (1979), pp. 31–40, Akadémiai Kiadó, co-published with Springer Science+Business Media

Simon, J., *Fonctions continues*, Vol. 2, ISTE Group, 2019.

Watier, F., *Équicontinuité dans les espaces pseudotopologiques*, Université de Sherbrooke, 1990.